

Capitolo 7 - Confronto numerico tra *dynamic* e *static hedging* delle opzioni binarie e a barriera

In questo capitolo effettueremo un confronto, condotto per mezzo di simulazioni numeriche, fra le prestazioni offerte, nel campo della copertura delle opzioni binarie e a barriera, tra due tecniche molto diverse: il *dynamic hedging* e lo *static hedging*. La prima metodologia è quella del semplice *Delta hedging*, ovvero la copertura tramite acquisti o vendite di sottostante. La seconda tecnica prevede l'utilizzo di altre opzioni (per lo più *vanilla*), in vendita o in acquisto, con lo scopo ben preciso di creare una replica il più possibile fedele dell'opzione da coprire. Il lettore ha già avuto modo di constatare nei capitoli precedenti come queste repliche diano il meglio di sé in condizioni per la verità piuttosto particolari: si vuole alludere all'ipotesi di *drift* nullo, in virtù della quale è possibile sintetizzare repliche matematicamente perfette delle *barrier options* nonché delle *american digital*. Questa ipotesi sarà per l'appunto tra le prime ad essere eliminata, con lo scopo di spostare il confronto tra *Delta* e *static hedging* su di un campo più aderente alle condizioni reali di mercato. Sono infatti previsti tre diversi scenari (quattro per le *down and in call*) entro i quali si svolgeranno le simulazioni numeriche.

Un primo scenario ideale, favorevole allo *static hedging*, prevede *drift* nullo e volatilità costante, nonché un tasso di "apprezzamento" del sottostante μ pari esattamente al tasso senza rischio: potrebbe apparire superfluo specificare il valore di un parametro che non trova spazio nemmeno nelle formule di valutazione, ma in realtà, come Gupta (1997) ha ampiamente spiegato, tale parametro può assumere un ruolo non indifferente nel caso di condizioni di copertura non ideali. Più precisamente può accadere che l'*hedger* utilizzi *Delta* calibrati su volatilità implicite (quelle che determinano il prezzo, normalmente maggiorato, a cui egli vende l'opzione) e non reali: ciò permette all'*hedger*, a patto che valga l'uguaglianza $\mu=r$ (il che implica che gli errori nella copertura, dovuti al riferimento ad una volatilità non reale, finiscono, in media, col compensarsi a vicenda), di lucrare in media la differenza tra premio ricevuto e premio calcolato in base alla volatilità reale (supposta costante). In ogni tabella, accanto al *dynamic hedging* tradizionale basato su *Delta* "reali" (facenti riferimento alla "*true volatility*") daremo quindi spazio ad una colonna di valori relativi appunto al caso in cui il *Delta hedging* sia condotto facendo uso di *Delta* "falsi" (calcolati utilizzando la volatilità implicita come stima della volatilità media attesa).

Nel secondo scenario verrà rimossa l'ipotesi di *drift* nullo (mantenendo in vita le altre due). Nel terzo (presente a scopo esemplificativo nel solo caso delle *down and in call*) salterà l'ipotesi $\mu=r$ (dove r è il tasso senza rischio), il che implica, a seconda delle situazioni, un peggioramento od un miglioramento del risultato medio da *Delta hedging*. Nell'ultimo scenario elimineremo l'ultima ipotesi non realistica: la volatilità cesserà infatti di essere costante su tutto il periodo di copertura (anche μ ed il *drift* si manterranno su valori realistici, ovvero diversi da r nel primo caso e diversi da zero nel secondo).

Le opzioni oggetto della nostra attenzione saranno, nell'ordine, le *Down and In Call*, le *Down and Out Call* (una *regular knock-in* ed una *regular knock-out*), le *Up and Out Call*, le *Up and In Call* (ovvero una *reverse knock-in* ed una *reverse knock-out*) ed infine, a rappresentanza delle *american digital*, le *Up and In Cash or Nothing*. Ogni cifra riportata nelle tabelle è frutto di un ciclo di 1000 simulazioni. Tali simulazioni prevedono movimenti del sottostante coerenti con l'ipotesi di un moto Browniano di tipo geometrico. Il punto di vista, in sede di copertura, è quello dell'emittente l'opzione; il premio della stessa è liquidato a termine e la copertura sul sottostante è effettuata utilizzando operazioni a termine (con scadenza analoga a quella dell'opzione). Nel caso di volatilità variabile si utilizza uno schema di movimento della stessa di tipo *mean reverting*, nel senso che essa tende ad oscillare intorno ad un valore medio di lungo periodo: tale valore corrisponde evidentemente alla *true volatility*; si veda in tal senso Tompkins (1997).

Prima di passare all'analisi vera e propria è però il caso di familiarizzare con gli indici di "prestazione" che incontreremo continuamente, durante la nostra analisi, nelle tabelle riassuntive:

1. La differenza media tra il valore teorico dell'opzione ed il costo totale di copertura (*Average Difference*): $AD = \frac{TV - HC}{TV}$, dove TV è il valore teorico (alla Black e Scholes) dell'opzione venduta, mentre HC è il costo totale sostenuto per coprire tale vendita.
2. Il grado di variabilità della differenza tra valore teorico e costo finale di copertura (*Hedge Performance*): $HP = \frac{ST.DEV.[TV - HC]}{TV}$, dove $ST.DEV.$ è l'operatore deviazione standard.
3. Il grado di significatività del valore di AD : $t = \frac{AD}{HP/\sqrt{1000}}$; quanto più alto in valore assoluto è l'indice, tanto più significativa è la differenza tra TV e HC .

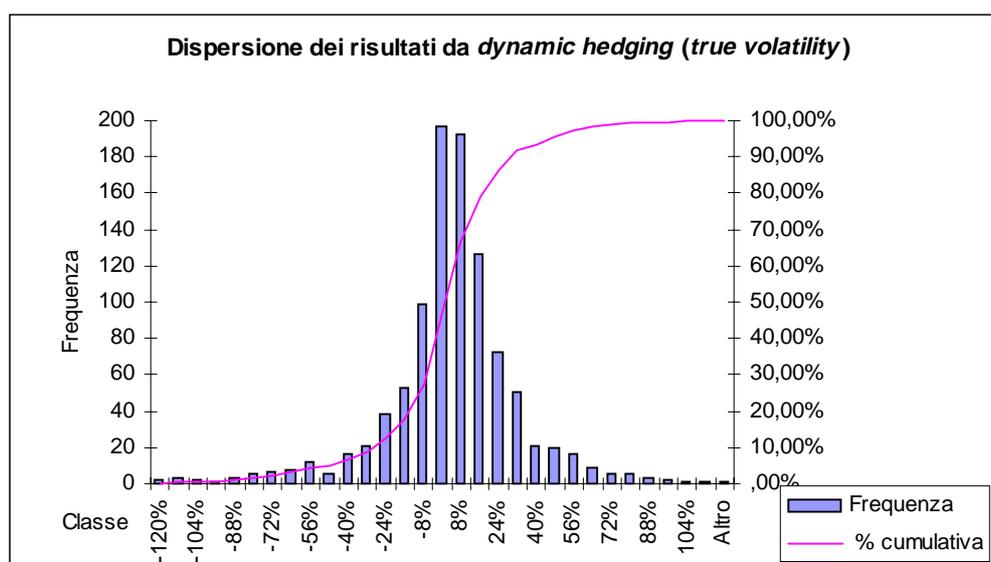
In sostanza il primo indicatore, AD , ci dice se l'operazione (vendita dell'opzione e sua contestuale copertura) si rivela *in media* un affare o meno. Il secondo indicatore ci dice quante sorprese (amare o piacevoli che siano) dobbiamo aspettarci, a conti fatti, nel risultato finale dell'operazione. Il terzo indicatore ci dice infine se è il caso di fidarci o meno di quanto emerge dall'uso del primo. Siamo a questo punto pronti per lo studio della prima *regular*: la *down and in call* (con *strike* 100\$ e barriera fissata a quota 90\$).

7.1 La *down and in call*

Prima di passare ad un qualsiasi commento riguardo agli esiti del confronto tra *dynamic* e *static hedging* delle *down and in call* riporto nelle pagine che seguono le tabelle ed i grafici relativi a ciascuno dei quattro scenari descritti. La replica statica consiste nell'acquisto di K/H *vanilla put* con *strike* fissato a quota H^2/K : nel caso di *drift* non nullo, quantità e *strike* saranno determinati attraverso una procedura numerica volta a ridurre al minimo gli

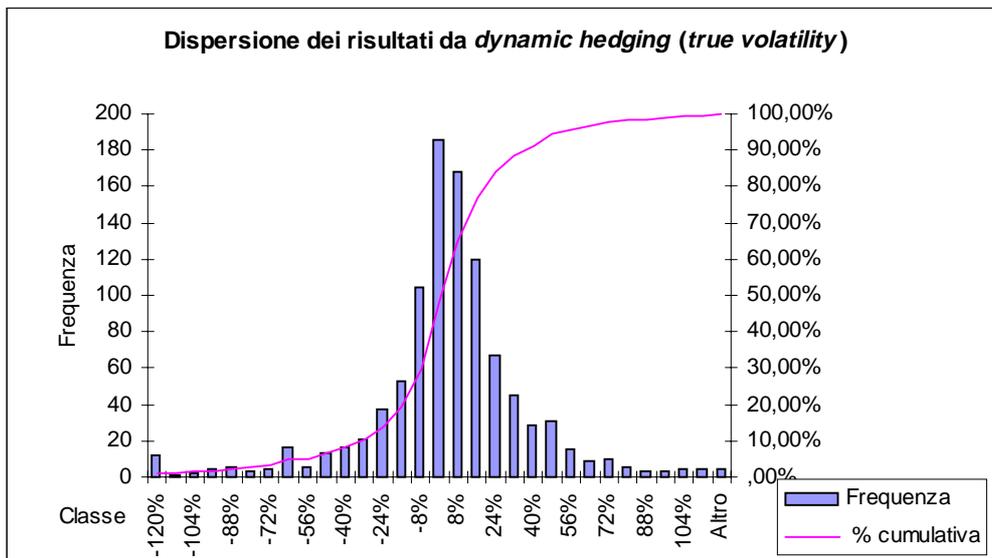
scostamenti al quadrato tra replica e *barrier* (tale tecnica ha portato all'acquisto di 2,86156 *vanilla put* con *strike* 79,339\$). Si badi che, per *drift* nullo non si intende soltanto il caso di un tasso senza rischio azzerato: infatti il *drift* complessivo può risultare nullo anche nel caso in cui il tasso di cui sopra (r) risulti coincidente con l'eventuale tasso di remunerazione (d) sull'attività sottostante (i dividendi nel caso di sottostante azionario od il tasso sulla valuta merce nel caso di opzioni valutarie). La simulazione prevede lo smobilizzo della posizione in opzioni nonché della copertura (sia dinamica che statica) nell'istante stesso in cui la barriera viene toccata (coerentemente con quanto attuato, per esempio, da Tompkins). Lo *spot* di partenza per ogni simulazione è posto pari a 110\$ (circa il 120% della barriera). La *true volatility* è del 15% (20% nell'ultimo scenario) mentre la volatilità implicita è fissata al 15,5%. Le formule (di valutazione) utilizzate per queste simulazioni sono del tipo Rubinstein (1991).

<i>Down and in call</i> : primo scenario	<i>Dynamic Hedging</i>	<i>Dynamic Hedging*</i> (Delta calcolati con volat. implicita)	<i>Static Hedging</i>
AD (differenza media % tra costo di copertura e valore teorico)	0,389%	18,750%	0,000%
HP (deviazione standard della differenza tra costo di copertura e valore teorico)	28,315%	33,884%	0,000%
T-test (grado di significatività di AD)	0,434	17,498	n.d.



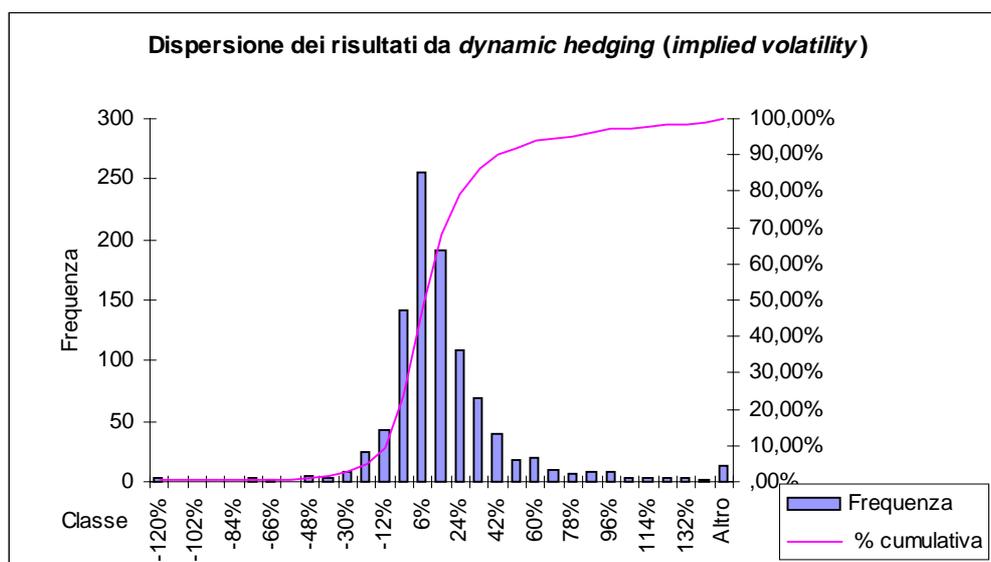
Prospetto 1 - *Down and in call*: primo scenario (*drift* nullo, volatilità costante, $\mu=r$); (in particolare $\mu=8\%$, $d=8\%$).

<i>Down and in call</i> : secondo scenario	<i>Dynamic Hedging</i>	<i>Dynamic Hedging*</i> (Delta calcolati con volat. implicita)	<i>Static Hedging</i>
AD (differenza media % tra costo di copertura e valore teorico)	0,128%	19,395%	-0,180%
HP (deviazione standard della differenza tra costo di copertura e valore teorico)	36,280%	40,060%	8,425%
T-test (grado di significatività di AD)	0,112	15,310	-0,677



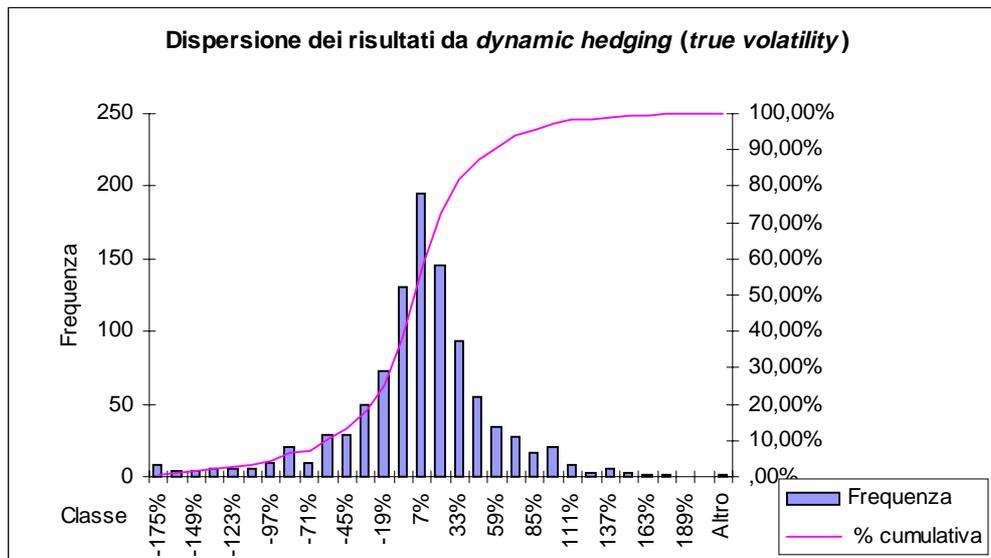
Prospetto 2 - *Down and in call*: secondo scenario (*drift* non nullo, volatilità costante, $\mu=r$); (in particolare $r=8\%$, $d=5\%$).

<i>Down and in call</i> : terzo scenario	<i>Dynamic Hedging</i>	<i>Dynamic Hedging*</i> (Delta calcolati con volat. implicita)	<i>Static Hedging</i>
AD (differenza media % tra costo di copertura e valore teorico)	-0,341%	12,931%	0,958%
HP (deviazione standard della differenza tra costo di copertura e valore teorico)	31,661%	34,260%	6,190%
T-test (grado di significatività di AD)	-0,341	11,936	4,896



Prospetto 3 - *Down and in call*: terzo scenario (*drift* non nullo, volatilità costante, $\mu \neq r$); (in particolare $\mu=15\%$, $r=8\%$, $d=5\%$).

<i>Down and in call</i> : quarto scenario	<i>Dynamic Hedging</i>	<i>Dynamic Hedging*</i> (Delta calcolati con volat. implicita)	<i>Static Hedging</i>
AD (differenza media % tra costo di copertura e valore teorico)	-0,787%	15,044%	0,240%
HP (deviazione standard della differenza tra costo di copertura e valore teorico)	52,337%	45,142%	2,645%
T-test (grado di significatività di AD)	-0,475	10,539	2,874



Prospetto 4 - *Down and in call*: quarto scenario (*drift* non nullo, volatilità variabile, $\mu \neq r$); (in particolare $\mu=15\%$, $r=8\%$, $d=5\%$, σ variabile a partire da 20%).

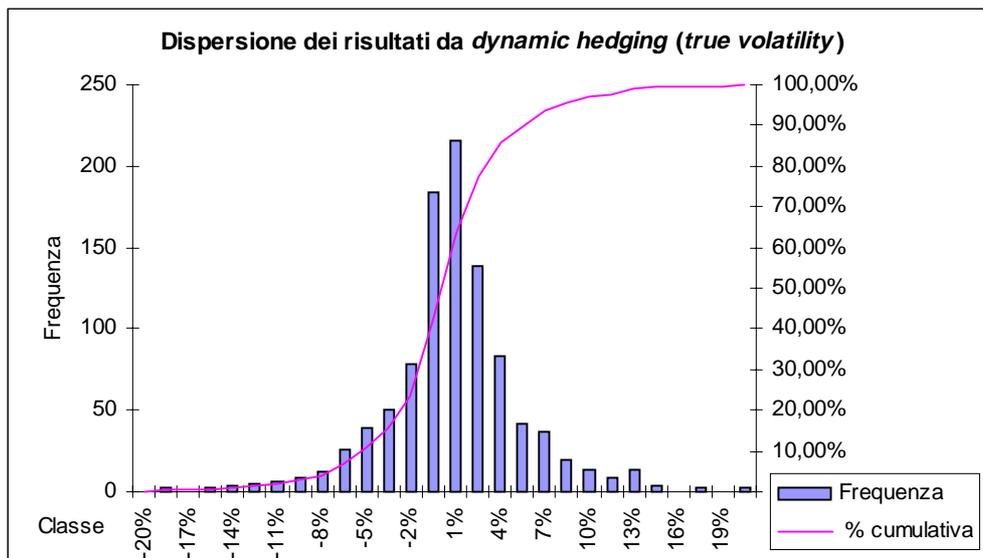
In base a quanto visto possiamo concludere:

- Nel primo scenario, a parte il risultato scontato dello *static hedging* (matematicamente perfetto), è interessante rilevare la variabilità non disprezzabile del risultato da *Delta hedging*: la sua deviazione standard è infatti pari a quasi sei volte quella registrabile (circa 5%) da una semplice *vanilla* nelle medesime condizioni ambientali.
- Sempre nel primo scenario l'utile del 18,75%, relativo al caso in cui l'operatore, dopo aver venduto l'opzione ad un prezzo in linea con la volatilità implicita, abbia poi attuato un *Delta hedging* coerente con la medesima, è perfettamente in linea con le previsioni di Gupta (1997). Infatti l'operatore non ha fatto altro che lucrare (*in media*) la differenza di prezzo esistente tra il premio calcolato in base alla volatilità implicita e quello calcolato in base alla *true volatility* (anche se la copertura, effettuata in relazione ad una volatilità fittizia, risulta per forza di cose meno precisa: di qui la maggiore variabilità del risultato).
- Nel secondo scenario cade l'ipotesi di *drift* nullo: lo *static hedging*, effettuato sulla base di parametri determinati per mezzo della tecnica dei minimi quadrati, si dimostra comunque all'altezza, sfoggiando una variabilità del risultato piuttosto contenuta rispetto a quella registrata dal *dynamic hedging* (8,4% contro 36-40%). Si è evitato di mostrare una distribuzione grafica dei risultati da *static hedging* in quanto estremamente particolare: infatti, quando la barriera non viene toccata durante tutto l'arco di vita dell'opzione (il che accade spesso), il risultato è per forza di cose esattamente pari alla differenza di valore, molto lieve, esistente, all'inizio del periodo, tra replica e *barrier* (con la prima leggermente meno costosa dell'esotica), mentre, nel caso in cui l'opzione si "estingua" anticipatamente (il che, dato uno *spot* di partenza piazzato al 120% della barriera, accade meno spesso), la chiusura immediata delle posizioni aperte può dare luogo a risultati variabili, in relazione con la mancanza di assoluta perfezione da parte della replica. Quanto al risultato leggermente negativo dello *static hedging*, il T-test ci rassicura circa la mancanza di significatività dello stesso.
- Nel terzo scenario un tasso di apprezzamento del sottostante notevolmente superiore al tasso senza rischio porta, coerentemente con Gupta (1997), ad un risultato medio del *Delta hedging* con *implied volatility* nettamente diverso dal precedente. Per il resto ha modesti riflessi sugli altri risultati (a parte un certo calo della volatilità dei risultati, il che si potrebbe spiegare con il fatto che il *drift* del sottostante più alto, allontanando il prezzo dalla zona "calda", con *Gamma* più elevato, limita le possibilità di risultati eclatanti).
- Nel quarto scenario la volatilità dei risultati ovviamente non può che aumentare: il *dynamic hedging* finisce con l'essere davvero pericoloso, mentre lo *static hedging* diventa l'unica strada percorribile per chi non voglia assumersi rischi eccessivi.
- Un'ultima considerazione riguarda l'ipotesi, utilizzata in queste simulazioni, di uno smobilizzo assolutamente istantaneo della copertura in caso di perforamento della barriera. Il lettore sappia che, eliminando tale ipotesi (ipotizzando uno smobilizzo anche solo di poco successivo al perforamento), i risultati medi subiscono una variazione drastica: in base ad altre simulazioni, che per ragioni di speditezza ometteremo di presentare, si è accertato come, nel caso specifico delle *down and in call*, in condizioni analoghe a quelle presentate nel primo scenario, l'*average difference* da *Delta hedging* (*true volatility*) passerebbe dallo zero per cento circa ad un ben più notevole 16% (accompagnato però da un aumento significativo della volatilità "HP"). La ragione di tale roboante risultato starebbe in quella sorta di effetto *Gamma* "improprio" (di segno opposto a quello vero) di cui si è già parlato nel capitolo settimo e che è reso possibile dalla frattura nel comportamento dell'opzione che si registra in corrispondenza della barriera. Tale "frattura" spiazza completamente la copertura lineare tipica del *Delta hedging*. Ovviamente nel caso del detentore dell'opzione il lusinghiero (ma volatile!) risultato di cui sopra assumerebbe segno negativo.

7.2 La *down and out call*

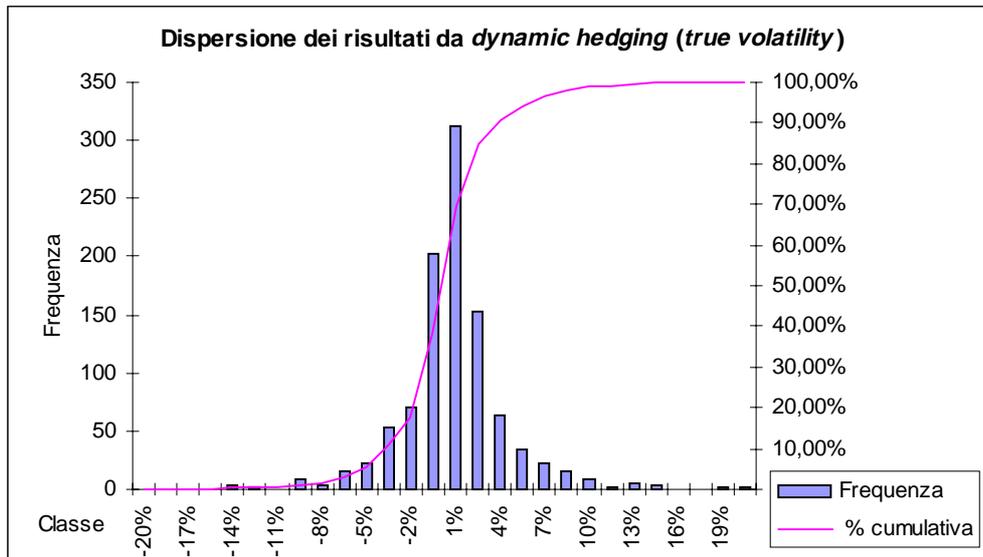
Per l'analisi delle *regular knock-out* utilizzeremo una *down and out call* con *strike* 100\$ e barriera a quota 90\$. A partire da questo ciclo di simulazioni in poi ometteremo di presentare il terzo scenario (quello relativo a $\mu \neq r$) per non appesantire eccessivamente la trattazione. La replica è costituita dall'acquisto della *vanilla* sottostante nonché dalla vendita di K/H *vanilla put* con *strike* fissato a quota H^2/K . In caso di *drift* non nullo la solita tecnica numerica consiglia di sostituire la posizione corta di cui sopra con la vendita di 2,87778 *put* con *strike* 79,31069. Lo *spot* di partenza è posto a quota 100\$. La *true volatility* è stata fissata pari al 15% (la "*implied*" invece al 15,5%).

<i>Down and out call</i> : primo scenario	<i>Dynamic Hedging</i>	<i>Dynamic Hedging*</i> (Delta calcolati con volat. implicita)	<i>Static Hedging</i>
AD (differenza media % tra costo di copertura e valore teorico)	0,119%	2,466%	0,000%
HP (deviazione standard della differenza tra costo di copertura e valore teorico)	4,727%	4,907%	0,000%
T-test (grado di significatività di AD)	0,798	15,889	n.d.



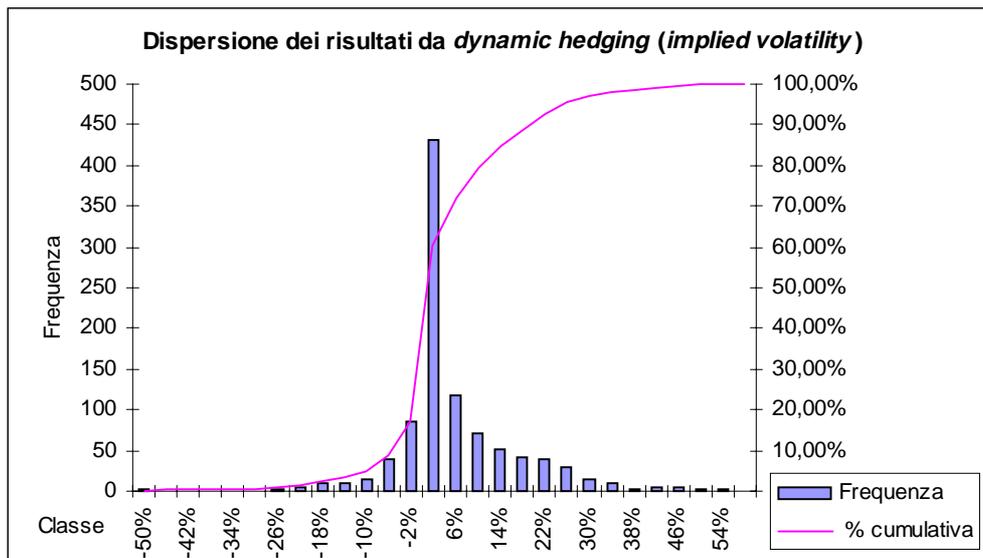
Prospetto 5 - *Down and out call*: primo scenario (*drift* nullo, volatilità costante, $\mu=r$); (in particolare $r=8\%$, $d=8\%$, $\sigma=15\%$, $\sigma_{impl.}=15,5\%$).

<i>Down and out call</i> : secondo scenario	<i>Dynamic Hedging</i>	<i>Dynamic Hedging*</i> (Delta calcolati con volat. implicita)	<i>Static Hedging</i>
AD (differenza media % tra costo di copertura e valore teorico)	0,091%	1,697%	0,009%
HP (deviazione standard della differenza tra costo di copertura e valore teorico)	3,406%	3,597%	0,185%
T-test (grado di significatività di AD)	0,845	14,918	1,590



Prospetto 6 - *Down and out call*: secondo scenario (*drift* non nullo, vol. costante, $\mu=r$); (in particolare $r=8\%$, $d=5\%$, $\sigma=15\%$, $\sigma_{impl.}=15,5\%$).

<i>Down and out call</i> : terzo scenario (volat. variab.)	<i>Dynamic Hedging</i>	<i>Dynamic Hedging*</i> (Delta calcolati con volat. implicita)	<i>Static Hedging</i>
AD (differenza media % tra costo di copertura e valore teorico)	1,889%	3,770%	0,019%
HP (deviazione standard della differenza tra costo di copertura e valore teorico)	11,539%	11,545%	0,239%
T-test (grado di significatività di AD)	5,175	10,325	2,491



Prospetto 7 - *Down and out call*: terzo scenario (*drift* non nullo, volatilità variabile, $\mu \neq r$); (in particolare $\mu=15\%$, $r=8\%$, $d=5\%$, $\sigma_{true}=20\%$, $\sigma_{impl.}=21\%$).

In base ai dati riportati nelle tabelle e nei grafici appena mostrati possiamo concludere:

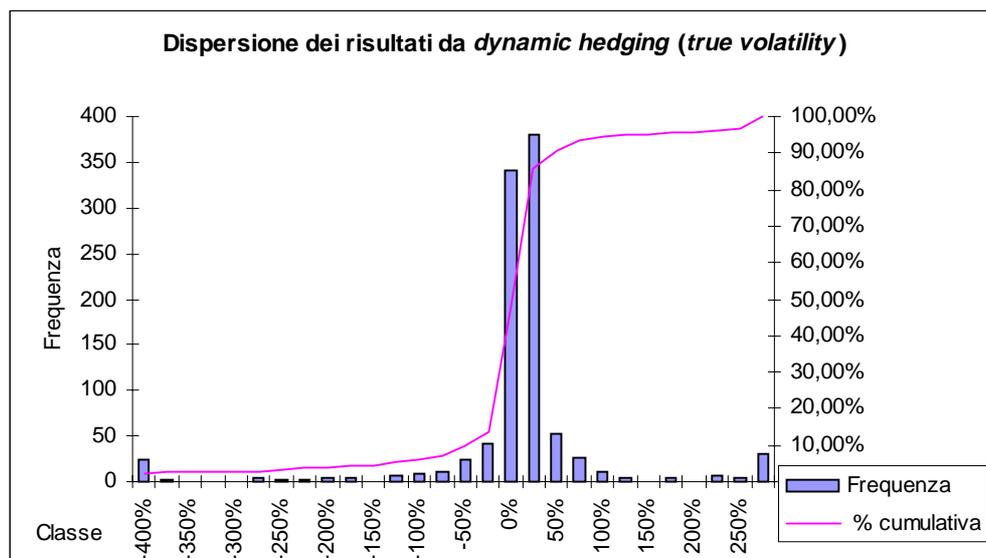
- In primo luogo, osservando i risultati emersi nel primo scenario, non si può fare a meno di ricordare, in conformità con Thomas (1996), come il *Gamma* di queste *regular knock-out* sia di fatto estremamente basso: persino una *vanilla* possiede un *Gamma* maggiore. Non a caso il *Delta hedging* si rivela perfettamente praticabile: anzi in base a quanto afferma Thomas si tratterebbe della modalità di copertura più utilizzata nel mercato per questo genere di opzioni. Ciò non significa naturalmente che debba trattarsi della copertura migliore. Ad ogni modo il risultato medio, come rivela il t-test, non è significativamente diverso da zero, mentre la volatilità dello stesso, in linea con quanto detto, risulta estremamente bassa, anzi addirittura inferiore a quella riscontrabile per una *vanilla* (5%: si veda Tompkins(1997)). Per quanto concerne lo *static hedging*, al solito l'uguaglianza tra tasso privo di rischio e tasso pagato sul sottostante (dividendi oppure tasso sulla valuta merce nel caso di opzioni valutarie) implica una perfezione assoluta della replica, il che lascia ovviamente poco spazio a risultati che non siano nulli, tanto per l'*average difference* quanto per l'*hedge performance*.
- Nel secondo scenario la rimozione dell'ipotesi di *drift* nullo non incide in maniera particolarmente allarmante nemmeno sulla copertura statica, che anzi mantiene un'efficienza invidiabile: la tecnica dei minimi quadrati (per intenderci alla Thomas (1996)) ci permette di realizzare una copertura, se non perfetta, molto vicina ad esserlo. Interessante è invece la possibile spiegazione per la riduzione della volatilità dei risultati da *Delta hedging*: in effetti il passaggio da un *drift* nullo ad uno positivo, come è possibile evincere (con una certa attenzione) dai grafici riportati nel quinto capitolo, riesce addirittura a ridurre il già scarsissimo *Gamma* della *knock-out*.
- Nel terzo ed ultimo scenario l'introduzione di una volatilità variabile (oscillante intorno alla *true volatility* di lungo periodo) porta, nel caso del *dynamic hedging*, ad un raddoppio abbondante (rispetto al primo scenario) della dispersione dei risultati. Lo *static hedging* al contrario si dimostra sostanzialmente insensibile a tale mutamento, rimanendo di fatto la soluzione ideale in qualsiasi contesto.
- Ancora una volta occorre ricordare come i risultati appena commentati (in linea con quanto ottenuto da Tompkins, limitatamente agli "scenari" in comune) siano anche la conseguenza di un'importante ipotesi circa lo smobilizzo immediato tanto della posizione in sottostante quanto, nel caso di *static hedging*, della posizione replicante: dovessimo rimuovere anche questa ipotesi (ipotizzando una rimozione della copertura anche solo di poco successiva al perforamento della barriera) il risultato medio, ad esempio da *Delta hedging*, ne risulterebbe diminuito sensibilmente (scenderebbe, nel primo scenario, al -3%), mentre la volatilità dello stesso subirebbe un leggero aumento (raggiungerebbe il 7% circa).

7.3 La up and out call

Le *reverse knock-out*, nelle quali rientra la *Up and Out Call*, si prestano, come vedremo, molto meno delle *regular* ad un tentativo di copertura di tipo tradizionale. La loro natura dicotomica e contraddittoria al tempo stesso (si pensi alle due "componenti" di cui si è già avuto ampio modo di discutere) determina un andamento del premio in relazione al prezzo sottostante per così dire "contrastato": in altre parole il grado di curvatura, e dunque il *Gamma* dell'opzione rende virtualmente impossibile il *Delta hedging* per scadenze ravvicinate. Lo stesso *static hedging*, per offrire risultati soddisfacenti, necessita di una certa liquidità del mercato delle *digital* (almeno europee): ciò naturalmente per evitare l'utilizzo nella replica dei poco

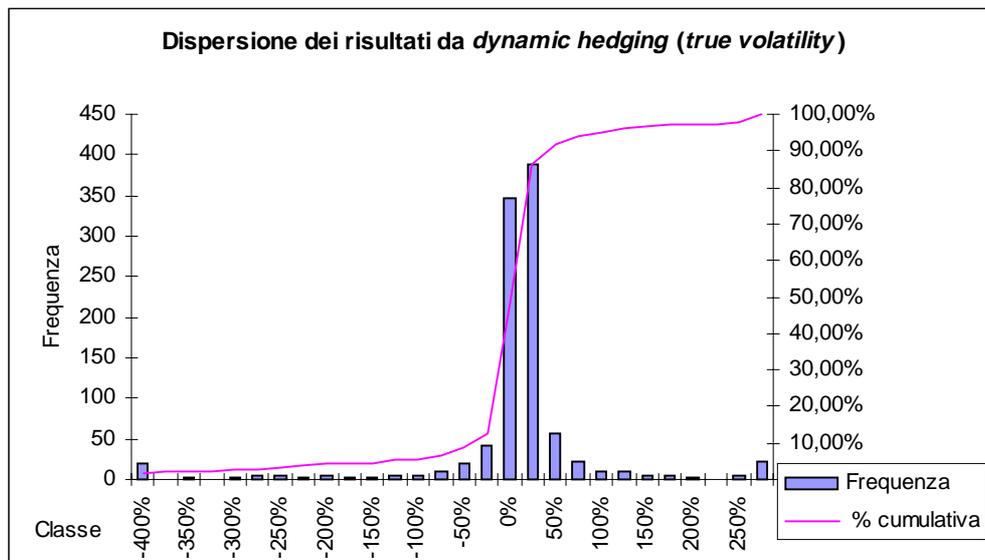
funzionali *spreads*. In effetti la replica prevede non solo l'acquisto della *vanilla* sottostante, ma anche la vendita di due *digital* europee (con *strike* posto in corrispondenza della barriera e *payoff* pari alla differenza tra barriera e *strike* della *reverse*) in combinazione con la vendita di $(H - K)/H$ *vanilla call* con *strike* H e di K/H *vanilla call* con *strike* fissato a quota H^2/K (tutto ciò naturalmente in caso di *drift* nullo). In caso di *drift* non nullo ($r=8\%$ e $d=5\%$) la solita tecnica numerica consiglia di sostituire le due ultime posizioni in *vanilla* di cui sopra con un'unica posizione corta ammontante in 0,985818 *vanilla call* con *strike* 119,6361. Nel caso le condizioni del mercato non consentissero l'utilizzo delle *digital* è possibile replicare a loro volta le stesse *binary* con degli *spreads*, ma ovviamente con un aggravio del costo della copertura (se la si vuole mantenere precisa): nelle nostre simulazioni assumiamo fattibile la vendita e l'acquisto di *digital* della varietà europea al loro valore teorico (alla Black e Scholes). Lo *spot* di partenza, come del resto lo *strike* dell'esotica, è posto a quota 100\$, la barriera a quota 110\$. La *true volatility* è stata fissata pari al 20% (la *implied* invece al 19%).

<i>Up and out call</i> : primo scenario	<i>Dynamic Hedging</i>	<i>Dynamic Hedging*</i> (Delta calcolati con volat. implicita)	<i>Static Hedging</i>
AD (differenza media % tra costo di copertura e valore teorico)	-5,304%	13,242%	0,000%
HP (deviazione standard della differenza tra costo di copertura e valore teorico)	205,633%	176,726%	0,000%
T-test (grado di significatività di AD)	-0,816	2,369	n.d.



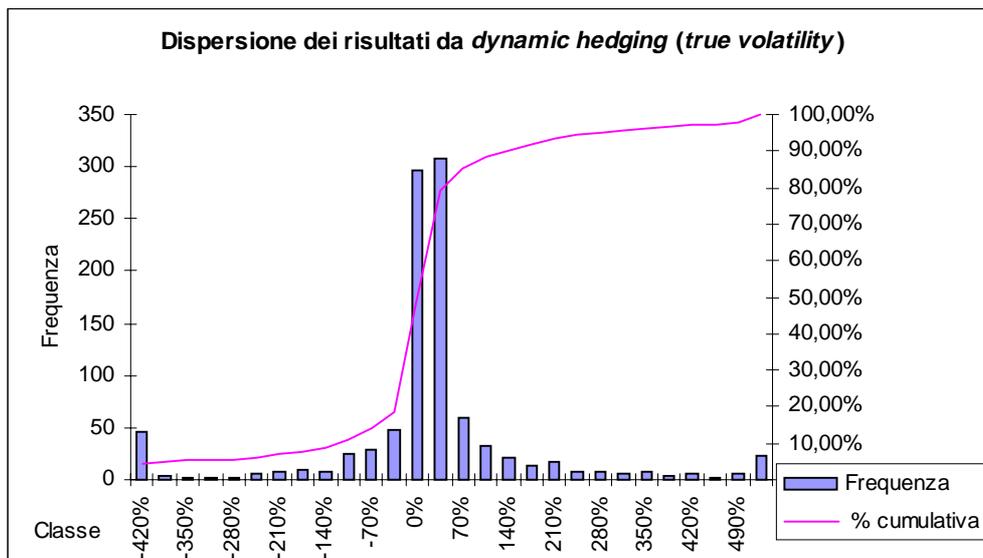
Prospetto 8 - *Up and out call*: primo scenario (*drift* nullo, volatilità costante, $\mu=r$); (in particolare $\mu=8\%$, $d=8\%$).

<i>Up and Out Call</i> : secondo scenario	<i>Dynamic Hedging</i>	<i>Dynamic Hedging*</i> (Delta calcolati con volat. implicita)	<i>Static Hedging</i>
AD (differenza media % tra costo di copertura e valore teorico)	-13,966%	8,183%	0,149%
HP (deviazione standard della differenza tra costo di copertura e valore teorico)	265,501%	211,971%	4,991%
T-test (grado di significatività di AD)	-1,663	1,22	0,941



Prospetto 9 - *Up and Out call*: secondo scenario (*drift* non nullo, volatilità costante, $\mu=r$); (in particolare $r=8\%$, $d=5\%$).

<i>Up and out call</i> : terzo scenario (volat. variab.)	<i>Dynamic Hedging</i>	<i>Dynamic Hedging*</i> (Delta calcolati con volat. implicita)	<i>Static Hedging</i>
AD (differenza media % tra costo di copertura e valore teorico)	-44,190%	-21,950%	0,274%
HP (deviazione standard della differenza tra costo di copertura e valore teorico)	459,805%	386,555%	5,370%
T-test (grado di significatività di AD)	-3,039	-1,796	1,613



Prospetto 10 - *Up and out call*: terzo scenario (*drift* non nullo, volatilità variabile, $\mu \neq r$); (in particolare $\mu=15\%$, $r=8\%$, $d=5\%$, $\sigma_{true}=20\%$, $\sigma_{impl.}=19\%$).

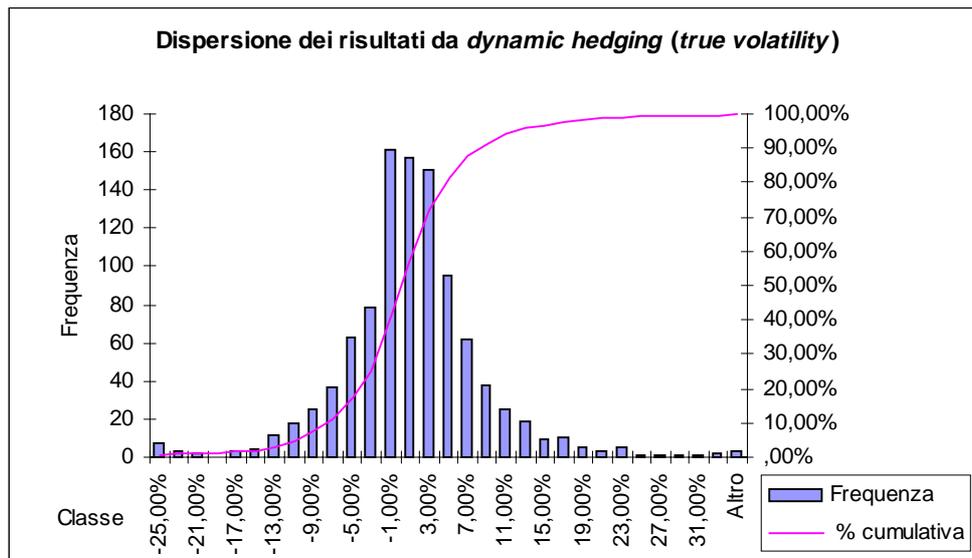
Da quanto visto si possono trarre alcune conclusioni:

- Il primo scenario conferma ampiamente quanto già previsto nelle pagine precedenti in merito all'applicabilità della copertura tradizionale alle *reverse knock-out*: la deviazione standard del risultato raggiunge infatti livelli venti volte superiori a quelli raggiungibili per una *vanilla*. Inutile ovviamente spiegare le ragioni di una tale dispersione dei risultati. Quanto poi al risultato medio negativo del 5% va notato quanto esso risulti di fatto ben poco significativo in un contesto in cui lo scarto quadratico medio ammonta al 200% ed oltre (e che desta ben altre preoccupazioni). Per contro lo *static hedging*, grazie all'utilizzo di *digital* europee e all'ipotesi di *drift* nullo, garantisce risultati ben più affidabili.
- Interessante, sempre in merito al primo scenario, è notare come, nel caso di utilizzo di *Delta* “falsi” da volatilità implicita, la dispersione finale del risultato finisce stranamente con l'essere inferiore a quella registrabile in caso di utilizzo di *Delta* esatti. Tale stranezza si può motivare con il fatto che i *Delta* “falsi” sono semplicemente dei *Delta* “caricati” (la volatilità implicita in questo caso è inferiore a quella reale), ovvero leggermente superiori, in valore assoluto, nell'area *in the money*, ai corrispondenti *Delta* esatti: ciò fa sì che si rivelino più funzionali per quelle zone di prezzo a ridosso della barriera che, con il loro *Gamma* elevatissimo, sono determinanti nella formazione della notevole dispersione dei risultati. Ciononostante la deviazione standard si mantiene comunque su livelli tali da sconsigliare l'uso di qualsivoglia *Delta*, esatto o “falso” che sia (salvo, va ricordato, per vite residue sufficientemente elevate, quando cioè il *Gamma* assume proporzioni nettamente meno scoraggianti).
- L'introduzione, nel secondo scenario, di un *drift* positivo non inficia la validità della tecnica statica (opportunamente riadattata), che riesce a contenere l'inevitabile calo di precisione nei limiti di un più che accettabile 5% circa. Sul fronte del *dynamic hedging* il passaggio da un *drift* nullo ad uno positivo pare avere un effetto nefasto sulla già intollerabile deviazione standard del risultato: in effetti il *drift* positivo concorre a spingere più facilmente il prezzo del sottostante nella zona per così dire “calda”, ovvero quella a ridosso della barriera (va ricordato che lo *spot* di partenza è fissato a quota 100).
- Nel terzo ed ultimo scenario l'ipotesi di volatilità variabile (in combinazione con l'aumento non trascurabile di μ) ha come ovvia conseguenza un ulteriore cospicuo aumento della dispersione dei risultati da *Delta hedging*, che raggiunge infatti valori nell'ordine del 400% ed oltre. A peggiorare notevolmente è anche il risultato medio: in effetti una situazione di volatilità variabile può portare la stessa a ridursi anche considerevolmente, magari proprio nella “zona calda” di prezzo (quella vicino la barriera), con la conseguenza di “congelare” prezzo ed effetto *Gamma* (favorevole all'emittente per prezzi vicini alla barriera) e dunque lasciando l'emittente letteralmente in pasto al terribile *time decay* negativo tipico delle *reverse knock-out* in quella zona. Si potrebbe obiettare che la volatilità stessa potrebbe parimenti risultare di dimensioni notevoli, anziché modeste, nella “zona calda”, con la conseguenza di favorire il detentore tramite un forte effetto *Gamma*; tuttavia una tale situazione (in cui il detentore finisce in media con il guadagnarci, grazie ad un effetto *Gamma* superiore all'effetto *time decay*) non può godere della medesima stabilità della precedente: l'opzione, in virtù dei più considerevoli movimenti del prezzo, finirebbe infatti con tutta probabilità con l'estinguersi anticipatamente.
- Preme inoltre (e soprattutto) rilevare la pressochè totale insensibilità che il metodo statico presenta nei confronti dell'ipotesi di volatilità variabile: essa in effetti non porta a peggioramenti apprezzabili nella precisione della copertura statica. In sostanza: anche nel caso delle *reverse knock-out* il metodo statico si rivela nettamente più efficiente della controparte dinamica, specie in condizioni di mercato realistiche.

7.4 La up and in call

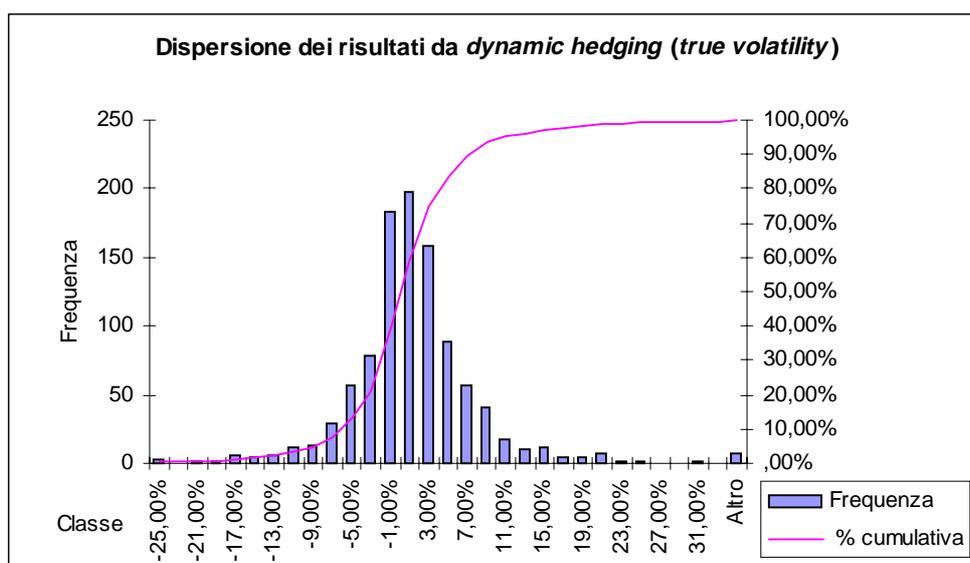
Nella sezione dedicata alle *reverse barrier* abbiamo presentato queste *knock-in* come opzioni la cui natura si potrebbe in qualche modo definire a metà strada tra le semplici *vanilla* e le meno mansuete *digital* americane (avvicinandosi all'una o all'altra a seconda dell'entità della vita residua). I risultati ottenuti sembrano, come vedremo, confermare tale natura "ibrida". La *Up and In Call* protagonista delle nostre simulazioni presenta *strike* e barriera fissati a quota 100\$ e 110\$ rispettivamente. Lo *spot* di partenza ammonta a 95\$. La *true volatility* è del 20%, la *implied* del 21%. La replica statica, sia analitica (quando il *drift* è nullo) che "numerica", è determinabile a partire da quella utilizzata per le *Up and Out Call* in base alla relazione già menzionata nella relativa sezione di *pricing*.

<i>Up and In call</i> : primo scenario	<i>Dynamic Hedging</i>	<i>Dynamic Hedging*</i> (Delta calcolati con volat. implicita)	<i>Static Hedging</i>
AD (differenza media % tra costo di copertura e valore teorico)	0,265%	7,200%	0,000%
HP (deviazione standard della differenza tra costo di copertura e valore teorico)	8,031%	8,018%	0,000%
T-test (grado di significatività di AD)	1,044	28,397	n.d.



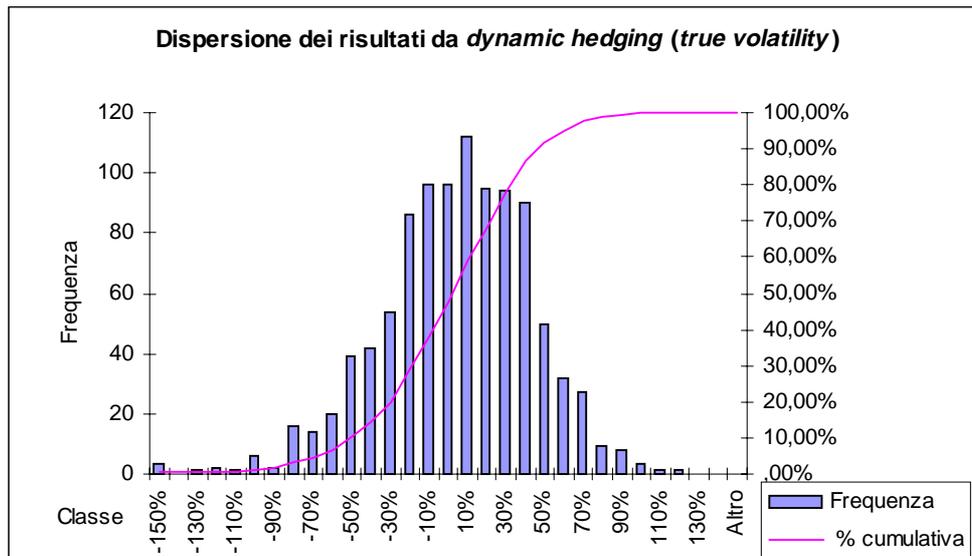
Prospetto 11 - *Up and In call*: primo scenario (*drift* nullo, volatilità costante, $\mu=r$); (in particolare $\mu=8\%$, $d=8\%$).

<i>Up and In Call</i> : secondo scenario	<i>Dynamic Hedging</i>	<i>Dynamic Hedging*</i> (Delta calcolati con volat. implicita)	<i>Static Hedging</i>
AD (differenza media % tra costo di copertura e valore teorico)	0,867%	6,734%	-0,001%
HP (deviazione standard della differenza tra costo di copertura e valore teorico)	9,965%	10,301%	0,093%
T-test (grado di significatività di AD)	2,752	20,673	-0,237



Prospetto 12 - *Up and In call*: secondo scenario (*drift* non nullo, volatilità costante, $\mu=r$); (in particolare $r=8\%$, $d=5\%$).

<i>Up and In call</i> : terzo scenario (volat. variab.)	<i>Dynamic Hedging</i>	<i>Dynamic Hedging*</i> (Delta calcolati con volat. implicita)	<i>Static Hedging</i>
AD (differenza media % tra costo di copertura e valore teorico)	-0,435%	7,631%	0,222%
HP (deviazione standard della differenza tra costo di copertura e valore teorico)	38,865%	39,841%	1,537%
T-test (grado di significatività di AD)	-0,354	6,057	4,566



Prospetto 13 - *Up and In call*: terzo scenario (*drift* non nullo, volatilità variabile, $\mu \neq r$); (in particolare $\mu=15\%$, $r=8\%$, $d=5\%$, $\sigma_{true}=20\%$, $\sigma_{impl.}=21\%$).

In base alle cifre mostrate possiamo concludere quanto segue.

- Il primo scenario conferma, con una dispersione del risultato da *dynamic hedging* intorno all'8%, la natura ibrida delle *reverse knock-in*, collocabili, in termini di pericolosità, a metà strada tra le *vanilla* (che denunciano un modesto 5%) e le *digital* americane (che invece, come vedremo, vantano un più cospicuo 15%). Va notato tuttavia come il risultato ottenuto dell'8% sia significativamente correlato alla scelta dello *spot* di partenza: se avessimo scelto uno *spot* più vicino alla barriera la vita media nettamente inferiore dell'opzione (prima di diventare *vanilla*) avrebbe agevolato la copertura del rischio, poiché, è il caso di ricordarlo, la pericolosità dell'opzione è legata essenzialmente alle dimensioni del rischio *Gamma*, che a sua volta è massimo *a poco tempo dalla scadenza*. I buoni risultati ottenuti dallo *static hedging* in condizioni di *drift* nullo non dovrebbero più essere motivo di stupore per il lettore.
- L'eliminazione, nel secondo scenario, dell'ipotesi di *drift* nullo, nuoce in maniera assolutamente risibile alla precisione della replica statica (opportunamente ottimizzata per mezzo della solita tecnica numerica dei minimi quadrati) che vede la dispersione del risultato salire appena di un innocuo 0,093%. Peggiora invece di un buon 2% quella da *Delta hedging*, semplicemente perché l'introduzione di un *drift* positivo spinge più facilmente il prezzo del sottostante nella zona a ridosso della barriera (a più elevato *Gamma*).
- Nel terzo ed ultimo scenario (quello a volatilità variabile) l'imprecisione delle tecniche tradizionali di copertura assume connotati preoccupanti: l'*Hedge Performance (HP)* arriva praticamente a quadruplicare. Notevolissima, in un tale contesto, la perfetta tenuta del metodo statico (volatilità del risultato di appena 1,5%). Ancora una volta dunque, qualora le condizioni del mercato lo permettano (liquidità accettabile delle *digital* che compongono la replica), lo *static hedging* si rivela incomparabilmente superiore alla controparte dinamica.

7.5 La up and in cash or nothing american digital

L'ultima tipologia di esotiche oggetto della nostra attenzione è rappresentata da una *Digital* della varietà americana (una *Up and In Cash or Nothing*). Si tratta, come si è già avuto modo di spiegare, di opzioni che pagano "o tutto o niente", senza sfumatura alcuna nella determinazione del *payoff*. Ciò comporta un andamento del premio in relazione al prezzo sottostante piuttosto "brusco", specialmente per basse vite residue. Ne consegue, ancora una volta, che il classico *Delta hedging* mal si adatta alla copertura di tali strumenti, salvo il caso in cui, a separarci dalla scadenza dell'opzione, ci sia un più che congruo spazio di tempo. La replica statica si compone di due *digital* della varietà europea con *strike* pari al livello della barriera e *payoff* identico a quello corrisposto dalla "cugina" americana; in aggiunta¹ la replica

prevede l'acquisto di $\frac{B}{H}$ (dove B è il *payoff* della *digital* ed H il livello della barriera) *vanilla*

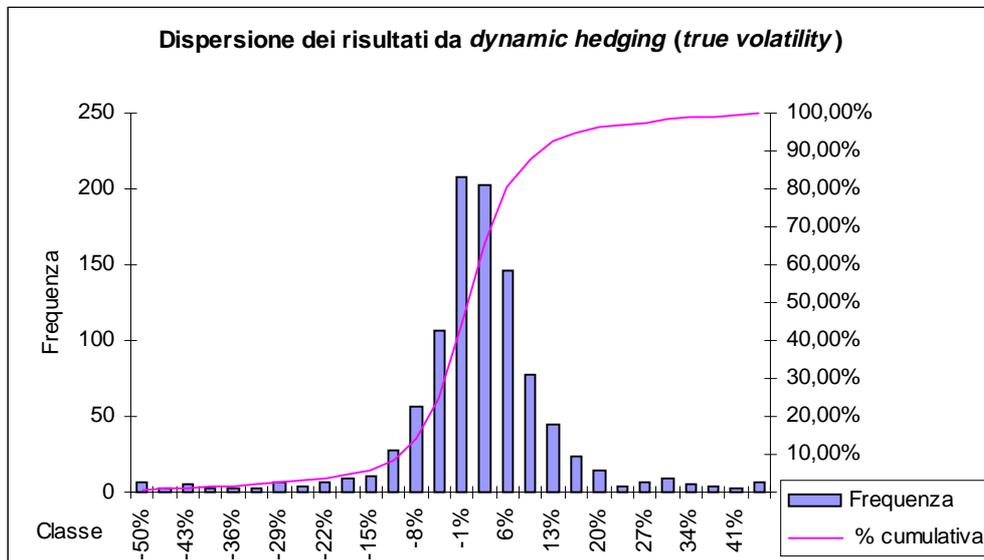
call con *strike* posto esattamente in corrispondenza della barriera. Ovviamente, in caso di *drift* non nullo, i parametri della replica statica andranno rivisti (con la solita tecnica numerica): facendo riferimento ai tassi utilizzati ($r=8\%$ e $d=5\%$). La replica modificata prevede la sostituzione della posizione in *vanilla* sopra menzionata con la vendita di 0,03415 *vanilla call*

¹ Si vedano in proposito le considerazioni già effettuate, nella sezione dedicata alla copertura di tali derivati, in merito alla compensazione dell'effetto "lognormale".

con *strike* 108,0632\$. Per completezza occorre specificare che la barriera è stata posta a quota 110\$, mentre lo *spot* di partenza ammonta a 90\$.

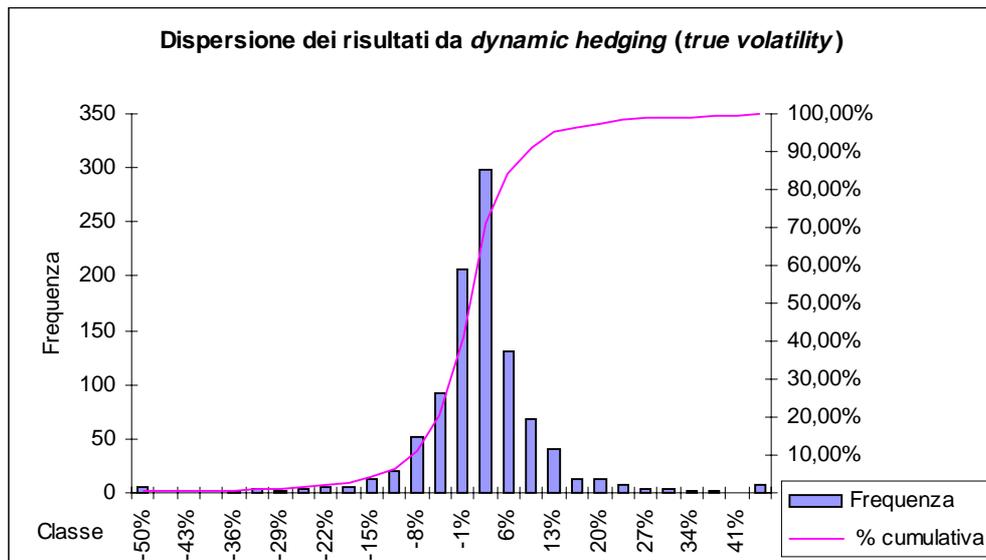
La volatilità di lungo periodo (la *true volatility*) è del 20%, mentre la volatilità implicita è collocata a quota 21%. I tassi utilizzati per i tre diversi scenari sono gli stessi impiegati nei cicli simulativi precedenti.

<i>Up and In American Digital:</i> primo scenario	<i>Dynamic Hedging</i>	<i>Dynamic Hedging*</i> (Delta calcolati con volat. implicita)	<i>Static Hedging</i>
AD (differenza media % tra costo di copertura e valore teorico)	-0,312%	7,053%	0,000%
HP (deviazione standard della differenza tra costo di copertura e valore teorico)	15,184%	14,649%	0,000%
T-test (grado di significatività di AD)	-0,649	15,224	n.d.



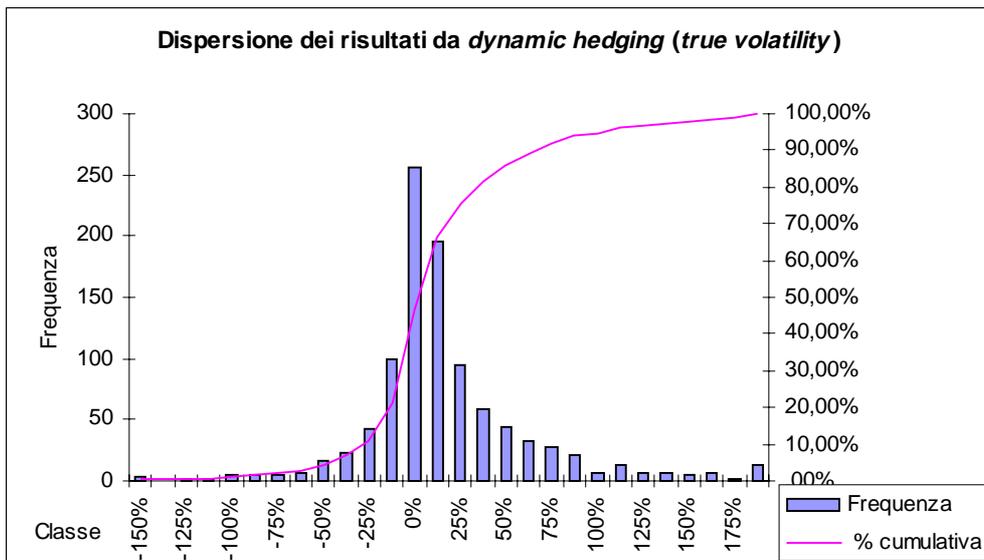
Prospetto 14 - *American Digital*: primo scenario (*drift* nullo, volatilità costante, $\mu=r$); (in particolare $\mu=8\%$, $d=8\%$).

<i>Up and In American Digital:</i> secondo scenario	<i>Dynamic Hedging</i>	<i>Dynamic Hedging*</i> (Delta calcolati con volat. implicita)	<i>Static Hedging</i>
AD (differenza media % tra costo di copertura e valore teorico)	-0,147%	5,861%	0,002%
HP (deviazione standard della differenza tra costo di copertura e valore teorico)	17,502%	17,120%	0,111%
T-test (grado di significatività di AD)	-0,266	10,826	0,664



Prospetto 15 - American Digital: secondo scenario (*drift* non nullo, volatilità costante, $\mu=r$); (in particolare $r=8\%$, $d=5\%$).

<i>Up and In American Digital:</i> terzo scenario (volat. variab.)	<i>Dynamic Hedging</i>	<i>Dynamic Hedging*</i> (Delta calcolati con volat. implicita)	<i>Static Hedging</i>
AD (differenza media % tra costo di copertura e valore teorico)	11,823%	17,475%	-0,013%
HP (deviazione standard della differenza tra costo di copertura e valore teorico)	52,102%	50,061%	0,168%
T-test (grado di significatività di AD)	7,176	11,039	-2,498



Prospetto 16 - *American Digital*: terzo scenario (*drift* non nullo, volatilità variabile, $\mu \neq r$); (in particolare $\mu=15\%$, $r=8\%$, $d=5\%$, $\sigma_{true}=20\%$, $\sigma_{impl.}=21\%$).

In base alle cifre appena esposte traiamo le conclusioni del caso.

- Il primo scenario, mostrando una dispersione del risultato da *Delta hedging* pari al 15% del premio iniziale, ovvero circa tre volte il dato ottenibile per le semplici *vanilla* (che si fermano al 5%), conferma la discreta pericolosità che le *digital* presentano se affrontate con tecniche di copertura tradizionali. Al solito, qualora fosse necessario ricordarlo, il risultato medio da *dynamic hedging* con *Delta* calcolati in base alla volatilità implicita non rappresenta altro se non la differenza di valore tra premio realizzato dal *writer* al momento della vendita (e calcolato con riferimento alla volatilità implicita) e premio calcolato in base alla *true volatility* di lungo periodo (il primo scenario prevede $\mu=r$). Ancora una volta lo *static hedging*, potendo giovare di un mercato delle *digital* europee perfettamente liquido, con il concorso dell'ipotesi di *drift* nullo (tipica del primo scenario), garantisce risultati perfettamente stabili.
- Nel secondo scenario l'introduzione del *drift* positivo (d passa dall'8% al 5%) porta a conseguenze del tutto analoghe a quelle osservate per le *reverse knock-in*: la copertura statica, aggiustata numericamente, soffre assai poco la novità in questione ($HP=0,111\%$), mentre si osserva un leggero aumento dell'imprecisione del metodo dinamico (dal 15% al 17,5%), evidentemente legato ad un più facile raggiungimento, da parte del prezzo del sottostante, della solita "zona calda" a ridosso della barriera ("calda" soprattutto, è bene ricordarlo, a poco tempo dalla scadenza).
- Nel terzo scenario la volatilità variabile (oltre ad un $\mu=15\%$) conduce ad un sostanziale raddoppio dell'imprecisione del *Delta hedging* (HP passa dal 17% al 52% circa) rendendo di fatto operazione alquanto azzardata il ricorso ad esso per la riduzione del rischio. Al solito si registra la più che ottima tenuta (sotto il profilo della precisione) dello *static hedging*, il quale si dimostra ancora una volta insensibile a mutamenti nella volatilità del sottostante. Alquanto inconsueto invece si presenta il risultato medio da *dynamic hedging*: un 11,823% di utile medio, anche in presenza di una dispersione del risultato stesso intorno al 50%, è da ritenersi senz'altro significativo. Tale sconcertante risultato si può spiegare con la stabilità di certe situazioni, favorevoli allo *short*, che un contesto di volatilità variabile può indubbiamente determinare: è in effetti possibile che si registri un calo di volatilità che vada a "congelare" il sottostante nella zona di prezzo a ridosso della barriera. Unitamente ad una bassa vita residua una tale situazione determina una corposa riduzione del rischio *Gamma* (sfavorevole all'emittente), che a questo punto non può più andare a compensare il forte effetto *Theta* (assai favorevole all'emittente) che l'opzione sfoggia per questi livelli di prezzo e di vita residua. È invece molto difficile che possa verificarsi l'opposto, ovvero una situazione in cui una volatilità molto elevata vada ad accrescere notevolmente il rischio *Gamma*, squilibrando la compensazione tra effetto *Gamma* e *Theta* a favore del detentore: una tale situazione durerebbe troppo poco e si dimostrerebbe troppo instabile, semplicemente perché l'alta volatilità stessa impedirebbe al prezzo del sottostante di rimanere a lungo nella "zona utile", cioè quella a ridosso della barriera, spingendolo invece assai più facilmente al definitivo *knocking-in* (o magari al definitivo allontanamento dalla zona-barriera). Tutto ciò spiega il risultato medio significativamente positivo che il *dynamic hedging* comporta in tali contesti.

Bibliografia

- Alexander, C. a cura di (1996), *The Handbook of Risk Management and Analysis*, John Wiley & Sons Ltd.
- Black F. e Scholes M. (1973), "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", in *Journal of Political Economy*, vol. 81, May-June, pp. 637-654.
- Bowie J. e Carr P. (1995), *Static Simplicity* in R. Jarrow (a cura di), *Over the Rainbow*, Risk Publications, pp.183-189.
- Carr, P. (1994), *European Put Call Symmetry*, Cornell University working paper.
- Cox, J.C. e Ross S.A. (1976), "The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes", in *Journal of Financial Economics*, vol. 3, pp. 145-166.
- Cox D.R., Miller H.D.(1965), *The Theory of Stochastic Processes*, Chapman & Hall.
- Derman E., Ergener D. e Kani I., (1995), "Static Option Replication", in *The Journal of Derivatives*, vol. 2, nr. 4 (estate 1995), pp.78-95.
- Erzegovesi L. (1992), *Le opzioni su titoli e su futures obbligazionari*, Larix, Milano.
- Erzegovesi L. (1997), *Ingegneria finanziaria: principi e applicazioni standard nei mercati del debito e dei cambi*, Università di Trento, Dipartimento di Informatica e studi aziendali.
- Garman M. e Kohlhagen S. (1983), "Foreign Currency Option Values", in *Journal of International Money and Finance*, vol. 2, pp. 231-237.
- Grabbe J. (1983), "The Pricing of Call and Put Options on Foreign Exchange", in *Journal of International Money and Finance*, vol. 2, pp.239-253.
- Gupta A. (1997), "On Neutral Ground", in *Risk*, vol. 10, nr. 7, July, pp. 37-41.
- Merton R. (1973), "Theory of Rational Option Pricing", in *Bell Journal of Economics and Management Science*, vol. 4, Spring, pp. 141-183.
- Neftci N. (1996), *An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives*, Academic Press, San Diego.
- Rubinstein M. e Reiner E. (1991a), "Breaking Down the Barriers", in *Risk*, September, pp. 28-35.
- Rubinstein M. e Reiner E. (1991b), "Unscrambling the Binary Code", in *Risk*, October, pp. 75-83.

- Rubinstein M. (1991), *Exotic Options*, Finance Working Paper 20, Walter A. Hass School of Business, Institute of Business and Economic Research, University of California at Berkeley, December.
- Shimko D. (1992), *Finance in Continuous Time. A Primer*, Kolb Publishing Company, Miami Fla.
- Taleb N. (1997), *Dynamic Hedging. Managing Vanilla and Exotic Options*, John Wiley & Sons, New York.
- Thomas B. (1996), *Exotic Options II* in Alexander C. (a cura di), (1996), *The Handbook of Risk Management and Analysis*, John Wiley & Sons Ltd, Chichester, pp.111-132.
- Tompkins R.G. (1997), "Static versus Dynamic Hedging of Exotic Options: An Evaluation of Hedge Performance via Simulation" in *NetExposure - Electronic Journal of Financial Risk*, 2, November, <http://www.netexposure.co.uk/>.
- Zhang, P.G. (1997), *Exotic Options. A Guide to Second Generation Options*, World Scientific, Singapore.