

# Capitolo 6 - Opzioni *reverse barrier*

Come si è già avuto modo di spiegare più volte in precedenza, la differenza fondamentale tra opzioni barriera di tipo *regular* ed opzioni barriera di tipo *reverse* consiste semplicemente nello stato, rispettivamente *out of the money* ed *in the money*, in cui l'opzione viene a trovarsi al momento della perforazione della barriera. Questa caratteristica delle *reverse barrier*, ovvero il collocarsi della barriera nella zona *in the money* dell'opzione, risulta tutt'altro che trascurabile: è tale *feature* ad essere infatti responsabile di un fortissimo dislivello nel valore intrinseco dell'opzione sui due lati della barriera, con conseguenti comportamenti anomali dell'esotica. Quando nel prosieguo affronteremo l'analisi diagrammatica delle *reverse*, non mancheranno elementi di sorpresa quali *call (knock-out)* caratterizzati da *Delta* a tratti negativi, o *time decay* non propriamente ortodossi. Ad ogni modo l'implicazione più sostanziale della particolare struttura delle *reverse* consiste purtroppo in una cronica difficoltà di copertura (perlomeno se perseguita secondo canoni tradizionali). In tal merito N.Taleb (1997), più volte citato in questo lavoro, riporta, all'inizio del capitolo dedicato a queste bizzose esotiche, la battuta di un operatore, N.Zeidan: "*The only thing I like about a [reverse] knock-out option is that it knocks out*". Per evitare che troppi operatori finissero con l'abbracciare la posizione del signor Zeidan, il mercato, dal lato dell'offerta, ha cercato quanto meno di smussare le asperità comportamentali delle *reverse*, introducendo con più frequenza il *rebate* nelle caratteristiche contrattuali delle stesse: tale "premio di consolazione", si pensi ad esempio alla *knock-out call* di cui sopra, può in effetti svolgere un ruolo di moderatore proprio nei confronti di quel dislivello di valore intrinseco che, registrabile a cavallo della barriera, è il vero ed unico responsabile della natura capricciosa di questa tipologia di esotiche. Lo schema di analisi proposto per il capitolo presente ricalca da vicino quello utilizzato per gli ultimi tre: dopo la consueta breve analisi dei *payoff*, passeremo dunque allo studio del *pricing* di tali opzioni, per poi approdare, dopo aver familiarizzato a dovere con l'andamento del premio e delle "greche", all'analisi delle diverse possibilità di copertura.

## 6.1 Definizione e *payoff*

Affinché, al perforamento della barriera, l'opzione *reverse barrier* "nasca" (se *knock-in*) o si estingua (se *knock-out*) effettivamente *in the money*, deve necessariamente risultare, per le *call*,  $H > K$ , e, per le *put*,  $H < K$ . Le *reverse barrier options* sono dunque: le *up and in call* (con  $H > K$ ), le *down and in put* (con  $H < K$ ), le *up and out call* (con  $H > K$ ) ed infine le *down and out put* (con  $H < K$ ).

Per meglio esplicitare le caratteristiche contrattuali di tali opzioni, se ne riportano qui di seguito i *payoff*.

$$\text{Up and in call:} \quad \begin{cases} \text{Max}[0, S_T - K] & \text{se per qualche } \tau \leq t \text{ risulta } S(\tau) \geq H \\ 0(o R) & \text{se per ogni } \tau \leq t \text{ risulta } S(\tau) < H \end{cases}$$

$$\text{Down and in put:} \quad \begin{cases} \text{Max}[0, K - S_T] & \text{se per qualche } \tau \leq t \text{ risulta } S(\tau) \leq H \\ 0(o R) & \text{se per ogni } \tau \leq t \text{ risulta } S(\tau) > H \end{cases}$$

$$\text{Up and out call:} \quad \begin{cases} \text{Max}[0, S_T - K] & \text{se per ogni } \tau \leq t \text{ risulta } S(\tau) < H \\ 0(o R) & \text{se per qualche } \tau \leq t \text{ risulta } S(\tau) \geq H \end{cases}$$

$$\text{Down and out put:} \quad \begin{cases} \text{Max}[0, K - S_T] & \text{se per ogni } \tau \leq t \text{ risulta } S(\tau) > H \\ 0(o R) & \text{se per qualche } \tau \leq t \text{ risulta } S(\tau) \leq H \end{cases}$$

dove  $S_T$  rappresenta il prezzo *spot* del sottostante a scadenza,  $\tau$  indica un momento determinato prima della scadenza  $t$ ,  $H$  è il livello di prezzo in corrispondenza del quale è fissata la barriera,  $R$  costituisce l'ammontare dell'eventuale *rebate*, mentre  $S(\tau)$  rappresenta il prezzo del sottostante rilevabile nell'istante  $\tau$ . Rimane da dire che, come del resto già accennato nell'introduzione, il *rebate* rappresenta una caratteristica piuttosto frequente per le *reverse barrier*, per lo meno più di quanto non lo sia per le *regular*.

## 6.2 Pricing delle *reverse barrier option*

Il tipo di valutazione che in questa sede offriremo delle *reverse*, poggiando su di un impianto concettuale di natura probabilistica del tutto affine a quello utilizzato finora, ci mette nelle condizioni di riutilizzare in larga misura, opportunamente adattate, le stesse soluzioni offerte, nel capitolo precedente, per gli integrali componenti il valore delle più semplici *regular*. Ciò permetterà naturalmente un notevole risparmio di calcoli. Per agevolare la comprensione di quanto segue si consiglia quindi la preliminare lettura del capitolo appena citato.

### La up and in call

Daremo inizio alla nostra analisi con la valutazione delle *up and in call*. Il valore di queste opzioni (senza *rebate*) è dato dalla somma dei seguenti integrali<sup>1</sup>:

---

<sup>1</sup> Si veda Rubinstein (1991).

$$C_{ui} = e^{-rt} \int_{\ln(H/S)}^{+\infty} (Se^u - K) f(u) du + e^{-rt} \int_{\ln(K/S)}^{\ln(H/S)} (Se^u - K) g(u) du .$$

Il primo integrale rappresenta il valore di quei *payoff* le cui *chance* di realizzazione sono legate alle probabilità che il prezzo ha di concludere la propria corsa oltre la barriera (non a caso l'intervallo di integrazione va dalla barriera, in versione logaritmica, fino ad infinito), indipendentemente dal percorso seguito: se infatti il prezzo viene a trovarsi a scadenza al di là della barriera, deve evidentemente averla attraversata almeno una volta, con conseguente attivazione della *vanilla*, e poiché la barriera è posta al di sopra dello *strike*, ne deriva evidentemente il conseguimento del corrispondente *payoff*. La *vanilla* tuttavia offre *payoff* positivi non solo per prezzi che vanno da  $H$  ad infinito, ma anche per prezzi compresi tra  $K$  ed  $H$ : sono questi i *payoff* il cui valore il secondo integrale si propone di catturare (infatti l'intervallo di integrazione va appunto da  $K$  ad  $H$ , entrambi ovviamente in versione logaritmica). Poiché tuttavia un prezzo finale compreso tra *strike* e barriera (dato  $K < H$ ) non implica automaticamente il perforamento di quest'ultima, ne consegue l'utilizzo, nell'integrale, della funzione di densità  $g(u)^2$  (al posto della tradizionale  $f(u)$ ), la quale, per ogni prezzo finale (espresso in forma logaritmica) posto al di qua della barriera, restituisce la densità di probabilità che il sottostante ha sì di concludere la propria corsa in corrispondenza di tale prezzo, ma dopo però essere preliminarmente passato per la barriera (si tratta in sostanza di una probabilità condizionata al perforamento di quest'ultima). Dalla somma di questi due integrali emerge dunque il valore della *up and in call* senza *rebate*. La loro soluzione (per lo sviluppo completo si veda l'apposita appendice matematica) ci offre la seguente formula di valutazione:

$$\begin{aligned} C_{ui} = & S N\left(\frac{\ln(S/H) + rt + \sigma^2 t/2}{\sigma\sqrt{t}}\right) - e^{-rt} K N\left(\frac{\ln(S/H) + rt - \sigma^2 t/2}{\sigma\sqrt{t}}\right) + \\ & + \left(\frac{H}{S}\right)^{\frac{2a}{\sigma^2}} \left[ \left(\frac{H^2}{S}\right) N\left(-\frac{\ln(H/S) + at + \sigma^2 t}{\sigma\sqrt{t}}\right) - e^{-rt} K N\left(-\frac{\ln(H/S) + at}{\sigma\sqrt{t}}\right) \right] - \\ & - \left(\frac{H}{S}\right)^{\frac{2a}{\sigma^2}} \left[ \left(\frac{H^2}{S}\right) N\left(-\frac{\ln(H^2/SK) + at + \sigma^2 t}{\sigma\sqrt{t}}\right) - e^{-rt} K N\left(-\frac{\ln(H^2/SK) + at}{\sigma\sqrt{t}}\right) \right]. \end{aligned}$$

### *Il rebate di una up and in call*

Nell'eventuale caso della presenza di un *rebate*, alla formula sopra riportata dovrà essere sommato anche il valore restituito dall'espressione seguente<sup>3</sup>:

<sup>2</sup> Per la rigorosa derivazione di  $g(u)$  si veda il capitolo relativo alle binarie americane.

<sup>3</sup> Ancora, come del resto per l'impostazione di tutti gli integrali, si faccia riferimento a Rubinstein (1991).

$$V_R(\text{up and in call}) = e^{-rt} R \int_{-\infty}^{\ln(H/S)} (f(u) - g(u)) du.$$

L'integrale rappresenta semplicemente la probabilità che la barriera non venga mai raggiunta durante l'arco di vita dell'opzione: moltiplicando tale probabilità per l'ammontare ( $R$ ) del *rebate* attualizzato otteniamo il valore attuale di quest'ultimo. Rispetto al *rebate* di una *down and in call* l'integrale presenta un intervallo di integrazione invertito: per risolvere il nostro problema sarà dunque sufficiente cambiare il segno dell'argomento delle funzioni cumulate componenti la soluzione già ottenuta in precedenza. In sostanza quindi:

$$V_R(\text{up and in call}) = e^{-rt} R \left[ N\left(-\frac{\ln(S/H) + at}{\sigma\sqrt{t}}\right) - \left(\frac{H}{S}\right)^{\frac{2a}{\sigma^2}} N\left(-\frac{\ln(H/S) + at}{\sigma\sqrt{t}}\right) \right].$$

### La down and in put (con e senza rebate)

Passando ora allo studio delle *down and in put*, la prima caratteristica di tali opzioni da rimarcare consiste nella perfetta simmetria della struttura di queste rispetto alle *up and in call*. Tale simmetria si sostanzia nella struttura degli integrali componenti il valore dell'opzione (per quanto segue valgono, adattate, le stesse considerazioni effettuate per le *up and in call*):

$$P_{di} = e^{-rt} \int_{-\infty}^{\ln(H/S)} (K - Se^u) f(u) du + \left[ e^{-rt} \int_{\ln(H/S)}^{+\infty} (K - Se^u) g(u) du - e^{-rt} \int_{\ln(K/S)}^{+\infty} (K - Se^u) g(u) du \right].$$

Rispetto alla *up and in call* il contenuto di ciascun integrale presenta il segno algebrico capovolto (trattandosi di *put*), accompagnato da un intervallo di integrazione invertito: ne consegue, a livello di soluzione, un cambiamento nel segno sia interno (nell'argomento della funzione) che esterno (il segno che precede la  $N(x)$ ) delle funzioni cumulate. Il valore della *down and in put* è dunque:

$$\begin{aligned} P_{di} = & -SN\left(-\frac{\ln(S/H) + rt + \sigma^2 t/2}{\sigma\sqrt{t}}\right) + e^{-rt} KN\left(-\frac{\ln(S/H) + rt - \sigma^2 t/2}{\sigma\sqrt{t}}\right) + \\ & + \left(\frac{H}{S}\right)^{\frac{2a}{\sigma^2}} \left[ -\left(\frac{H^2}{S}\right) N\left(\frac{\ln(H/S) + at + \sigma^2 t}{\sigma\sqrt{t}}\right) + e^{-rt} KN\left(\frac{\ln(H/S) + at}{\sigma\sqrt{t}}\right) \right] - \\ & - \left(\frac{H}{S}\right)^{\frac{2a}{\sigma^2}} \left[ -\left(\frac{H^2}{S}\right) N\left(\frac{\ln(H^2/SK) + at + \sigma^2 t}{\sigma\sqrt{t}}\right) + e^{-rt} KN\left(\frac{\ln(H^2/SK) + at}{\sigma\sqrt{t}}\right) \right]. \end{aligned}$$

Per quanto riguarda il *rebate*, al contrario, a cambiare è soltanto l'intervallo di integrazione (invertito):

$$V_R(\text{down and in put}) = e^{-rt} R \int_{\ln(H/S)}^{+\infty} (f(u) - g(u)) du.$$

La soluzione dell'integrale è dunque (un intervallo di integrazione invertito porta ad un cambiamento nel segno dell'argomento delle funzioni cumulate):

$$V_R(\text{down and in put}) = e^{-rt} R \left[ N \left( \frac{\ln(S/H) + at}{\sigma\sqrt{t}} \right) - \left( \frac{H}{S} \right)^{\frac{2a}{\sigma^2}} N \left( \frac{\ln(H/S) + at}{\sigma\sqrt{t}} \right) \right].$$

## La up and out call

Lasciamo a questo punto da parte lo studio delle *reverse knock-in* per meglio analizzare struttura e valore delle *knock-out*, ed in particolare delle *up and out call*. Il valore di tali opzioni è offerto dalla soluzione del seguente singolo integrale<sup>4</sup>:

$$C_{uo} = e^{-rt} \int_{\ln(K/S)}^{\ln(H/S)} (Se^u - K)(f(u) - g(u)) du.$$

La *up and out call* offre, per ovvi motivi, *payoff* positivi nella sola zona di prezzo compresa tra  $K$  (lo *strike*) ed  $H$  (la barriera): questo spiega l'intervallo di integrazione. Prima condizione dunque (necessaria ma non sufficiente) per l'ottenimento di un *payoff* positivo è un prezzo finale a scadenza compreso tra  $K$  ed  $H$ . Tuttavia è anche necessario che il sottostante, nel raggiungere a scadenza tale prezzo finale, non vi arrivi passando per la barriera (altrimenti l'opzione "*knocks out*"): questo spiega perché, all'interno dell'integrale, si sottragga la funzione  $g(u)$  alla solita  $f(u)$ . In effetti  $g(u)$  rappresenta semplicemente la densità di probabilità con cui il sottostante può raggiungere un dato livello di prezzo (a scadenza) al di qua della barriera, passando però per la stessa. Dunque in sostanza l'integrale non fa altro che sottrarre, per ogni livello del prezzo finale, alla "probabilità" che il sottostante vi arrivi, indipendentemente dal percorso seguito, la "probabilità" che il sottostante vi arrivi passando per la barriera: quindi  $(f(u) - g(u))$  è la "probabilità" che il sottostante raggiunga a scadenza il livello dato di prezzo (in versione logaritmica  $u$ ) senza mai toccare la barriera. Risolvendo l'integrale proposto otteniamo (ancora una volta, per lo sviluppo matematico completo, si veda l'apposita appendice a fine capitolo):

$$\begin{aligned} C_{uo} = & SN \left( \frac{\ln(S/K) + rt + \sigma^2 t/2}{\sigma\sqrt{t}} \right) - e^{-rt} KN \left( \frac{\ln(S/K) + rt - \sigma^2 t/2}{\sigma\sqrt{t}} \right) - \\ & - SN \left( \frac{\ln(S/H) + rt + \sigma^2 t/2}{\sigma\sqrt{t}} \right) + e^{-rt} KN \left( \frac{\ln(S/H) + rt - \sigma^2 t/2}{\sigma\sqrt{t}} \right) - \\ & - \left( \frac{H}{S} \right)^{\frac{2a}{\sigma^2}} \left[ \left( \frac{H^2}{S} \right) N \left( -\frac{\ln(H/S) + at + \sigma^2 t}{\sigma\sqrt{t}} \right) - e^{-rt} KN \left( -\frac{\ln(H/S) + at}{\sigma\sqrt{t}} \right) \right] + \end{aligned}$$

<sup>4</sup> Come già accaduto, si è preferito impostare il problema in maniera più "compatta" ed intuitiva rispetto alla scelta operata da Rubinstein (1991). Nella scissione dell'integrale proposta in appendice il lettore ritroverà l'impostazione tipica dell'autore appena citato.

$$+\left(\frac{H}{S}\right)^{\frac{2a}{\sigma^2}} \left[ \left(\frac{H^2}{S}\right) N\left(-\frac{\ln(H^2/SK) + at + \sigma^2 t}{\sigma\sqrt{t}}\right) - e^{-rt} KN\left(-\frac{\ln(H^2/SK) + at}{\sigma\sqrt{t}}\right) \right].$$

Ovviamente l'eventuale *rebate* non necessita di una trattazione specifica, trattandosi semplicemente di un'*american digital* (della varietà *immediate*) opportunamente inserita nella struttura contrattuale dell'opzione. Si rinvia pertanto alla lettura del capitolo relativo alle binarie americane.

## La down and out put

Rimane da esaminare ormai soltanto la valutazione delle *down and out put*. Trattandosi di una struttura contrattuale del tutto simmetrica a quella appena esaminata, ci si può ragionevolmente aspettare che valga anche per essa una relazione analoga a quella esistente (si veda l'appendice) tra *up and out call* ed *up and in call*. Deve quindi essere:

$$P_{do} + P_{di} = \text{Vanilla put}.$$

E dunque:

$$P_{do} = \text{Vanilla put} - P_{di}.$$

A questo punto è facile offrire la soluzione analitica completa per le *down and out put*:

$$\begin{aligned} P_{do} = & -SN\left(-\frac{\ln(S/K) + rt + \sigma^2 t/2}{\sigma\sqrt{t}}\right) + e^{-rt} KN\left(-\frac{\ln(S/K) + rt - \sigma^2 t/2}{\sigma\sqrt{t}}\right) + \\ & + SN\left(-\frac{\ln(S/H) + rt + \sigma^2 t/2}{\sigma\sqrt{t}}\right) - e^{-rt} KN\left(-\frac{\ln(S/H) + rt - \sigma^2 t/2}{\sigma\sqrt{t}}\right) - \\ & - \left(\frac{H}{S}\right)^{\frac{2a}{\sigma^2}} \left[ -\left(\frac{H^2}{S}\right) N\left(\frac{\ln(H/S) + at + \sigma^2 t}{\sigma\sqrt{t}}\right) + e^{-rt} KN\left(\frac{\ln(H/S) + at}{\sigma\sqrt{t}}\right) \right] + \\ & + \left(\frac{H}{S}\right)^{\frac{2a}{\sigma^2}} \left[ -\left(\frac{H^2}{S}\right) N\left(\frac{\ln(H^2/SK) + at + \sigma^2 t}{\sigma\sqrt{t}}\right) + e^{-rt} KN\left(\frac{\ln(H^2/SK) + at}{\sigma\sqrt{t}}\right) \right]. \end{aligned}$$

Si conclude qui il paragrafo dedicato al *pricing* delle *reverse barrier options*: nel prossimo paragrafo utilizzeremo, al solito, l'analisi diagrammatica per meglio approfondire lo studio di tali strumenti derivati. Prima tuttavia di affrontare tale approfondimento il lettore potrà trovare utile una rivisitazione<sup>5</sup> delle formule appena fornite per il caso di opzioni su valute o su sottostanti che pagano un dividendo proporzionale costante (modelli rispettivamente di Garman-Kohlhagen o di Merton), oppure per il caso in cui il derivato faccia riferimento ad un sottostante *forward* (modello di Grabbe): le tabelle riportate nelle pagine seguenti possono essere d'aiuto in tal senso.

<sup>5</sup> In tal senso ci si è avvalsi anche dell'apporto di Zhang (1997: 201-247).

Tabella 1 - Pricing delle reverse barrier in presenza di dividendi (o nel caso di opzioni valutarie)

<b>Up and in call</b>	$C_{ui} = e^{-dt} S \cdot N\left(\frac{\ln(S/H) + rt - dt + \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}}\right) - e^{-rt} K \cdot N\left(\frac{\ln(S/H) + rt - dt - \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}}\right) +$ $+\left(\frac{H}{S}\right)^{\frac{2a}{\sigma^2}} \left[ e^{-dt} \left(\frac{H^2}{S}\right) N\left(-\frac{\ln(H/S) + rt - dt + \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}}\right) - e^{-rt} K \cdot N\left(-\frac{\ln(H/S) + rt - dt - \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}}\right) \right] -$ $-\left(\frac{H}{S}\right)^{\frac{2a}{\sigma^2}} \left[ e^{-dt} \left(\frac{H^2}{S}\right) N\left(-\frac{\ln(H^2/SK) + rt - dt + \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}}\right) - e^{-rt} K \cdot N\left(-\frac{\ln(H^2/SK) + rt - dt - \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}}\right) \right]$
<b>Down and in put</b>	$P_{di} = -e^{-dt} S \cdot N\left(-\frac{\ln(S/H) + rt - dt + \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}}\right) + e^{-rt} K \cdot N\left(-\frac{\ln(S/H) + rt - dt - \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}}\right) +$ $+\left(\frac{H}{S}\right)^{\frac{2a}{\sigma^2}} \left[ -e^{-dt} \left(\frac{H^2}{S}\right) \cdot N\left(\frac{\ln(H/S) + rt - dt + \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}}\right) + e^{-rt} K \cdot N\left(\frac{\ln(H/S) + rt - dt - \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}}\right) \right] -$ $-\left(\frac{H}{S}\right)^{\frac{2a}{\sigma^2}} \left[ -e^{-dt} \left(\frac{H^2}{S}\right) \cdot N\left(\frac{\ln(H^2/SK) + rt - dt + \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}}\right) + e^{-rt} K \cdot N\left(\frac{\ln(H^2/SK) + rt - dt - \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}}\right) \right]$
<b>Up and out call</b>	$C_{uo} = e^{-dt} S \cdot N\left(\frac{\ln(S/K) + rt - dt + \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}}\right) - e^{-rt} K \cdot N\left(\frac{\ln(S/K) + rt - dt - \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}}\right) -$ $-e^{-dt} S \cdot N\left(\frac{\ln(S/H) + rt - dt + \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}}\right) + e^{-rt} K \cdot N\left(\frac{\ln(S/H) + rt - dt - \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}}\right) -$ $-\left(\frac{H}{S}\right)^{\frac{2a}{\sigma^2}} \left[ e^{-dt} \left(\frac{H^2}{S}\right) N\left(-\frac{\ln(H/S) + rt - dt + \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}}\right) - e^{-rt} K \cdot N\left(-\frac{\ln(H/S) + rt - dt - \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}}\right) \right] +$ $+\left(\frac{H}{S}\right)^{\frac{2a}{\sigma^2}} \left[ e^{-dt} \left(\frac{H^2}{S}\right) N\left(-\frac{\ln(H^2/SK) + rt - dt + \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}}\right) - e^{-rt} K \cdot N\left(-\frac{\ln(H^2/SK) + rt - dt - \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}}\right) \right]$
<b>Down and out put</b>	$P_{do} = -e^{-dt} S \cdot N\left(-\frac{\ln(S/K) + rt - dt + \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}}\right) + e^{-rt} K \cdot N\left(-\frac{\ln(S/K) + rt - dt - \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}}\right) +$ $+e^{-dt} S \cdot N\left(-\frac{\ln(S/H) + rt - dt + \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}}\right) - e^{-rt} K \cdot N\left(-\frac{\ln(S/H) + rt - dt - \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}}\right) -$ $-\left(\frac{H}{S}\right)^{\frac{2a}{\sigma^2}} \left[ -e^{-dt} \left(\frac{H^2}{S}\right) \cdot N\left(\frac{\ln(H/S) + rt - dt + \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}}\right) + e^{-rt} K \cdot N\left(\frac{\ln(H/S) + rt - dt - \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}}\right) \right] +$ $+\left(\frac{H}{S}\right)^{\frac{2a}{\sigma^2}} \left[ -e^{-dt} \left(\frac{H^2}{S}\right) \cdot N\left(\frac{\ln(H^2/SK) + rt - dt + \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}}\right) + e^{-rt} K \cdot N\left(\frac{\ln(H^2/SK) + rt - dt - \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}}\right) \right]$

**Legenda:**

$S$  è il prezzo *spot* del sottostante

$K$  è lo *strike* dell'opzione

$H$  è il livello barriera

$\sigma$  è la volatilità del sottostante

$t$  è la vita residua dell'opzione.

$r$  è il tasso senza rischio, mentre  $d$  è il tasso pagato sul sottostante ( $a$  è il *drift* logaritmico:  $a = r - d - \sigma^2/2$ )

Tabella 2 - Pricing delle reverse barrier in caso di riferimento a prezzi forward

<b>Up and in call</b>	$C_{ui} = F \cdot N\left(\frac{\ln(F/H) + \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}}\right) - K \cdot N\left(\frac{\ln(F/H) - \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}}\right) +$ $+ \left(\frac{F}{H}\right) \left[ \left(\frac{H^2}{F}\right) N\left(-\frac{\ln(H/F) + \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}}\right) - K \cdot N\left(-\frac{\ln(H/F) - \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}}\right) \right] -$ $- \left(\frac{F}{H}\right) \left[ \left(\frac{H^2}{F}\right) N\left(-\frac{\ln(H^2/FK) + \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}}\right) - K \cdot N\left(-\frac{\ln(H^2/FK) - \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}}\right) \right]$
<b>Down and in put</b>	$P_{di} = -F \cdot N\left(-\frac{\ln(F/H) + \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}}\right) + K \cdot N\left(-\frac{\ln(F/H) - \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}}\right) +$ $+ \left(\frac{F}{H}\right) \left[ -\left(\frac{H^2}{F}\right) \cdot N\left(\frac{\ln(H/F) + \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}}\right) + K \cdot N\left(\frac{\ln(H/F) - \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}}\right) \right] -$ $- \left(\frac{F}{H}\right) \left[ -\left(\frac{H^2}{F}\right) \cdot N\left(\frac{\ln(H^2/FK) + \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}}\right) + K \cdot N\left(\frac{\ln(H^2/FK) - \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}}\right) \right]$
<b>Up and out call</b>	$C_{uo} = F \cdot N\left(\frac{\ln(F/K) + \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}}\right) - K \cdot N\left(\frac{\ln(F/K) - \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}}\right) -$ $- F \cdot N\left(\frac{\ln(F/H) + \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}}\right) + K \cdot N\left(\frac{\ln(F/H) - \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}}\right) -$ $- \left(\frac{F}{H}\right) \left[ \left(\frac{H^2}{F}\right) N\left(-\frac{\ln(H/F) + \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}}\right) - K \cdot N\left(-\frac{\ln(H/F) - \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}}\right) \right] +$ $+ \left(\frac{F}{H}\right) \left[ \left(\frac{H^2}{F}\right) N\left(-\frac{\ln(H^2/FK) + \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}}\right) - K \cdot N\left(-\frac{\ln(H^2/FK) - \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}}\right) \right]$
<b>Down and out put</b>	$P_{do} = -F \cdot N\left(-\frac{\ln(F/K) + \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}}\right) + K \cdot N\left(-\frac{\ln(F/K) - \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}}\right) +$ $+ F \cdot N\left(-\frac{\ln(F/H) + \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}}\right) - K \cdot N\left(-\frac{\ln(F/H) - \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}}\right) -$ $- \left(\frac{F}{H}\right) \left[ -\left(\frac{H^2}{F}\right) \cdot N\left(\frac{\ln(H/F) + \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}}\right) + K \cdot N\left(\frac{\ln(H/F) - \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}}\right) \right] +$ $+ \left(\frac{F}{H}\right) \left[ -\left(\frac{H^2}{F}\right) \cdot N\left(\frac{\ln(H^2/FK) + \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}}\right) + K \cdot N\left(\frac{\ln(H^2/FK) - \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}}\right) \right]$

**Legenda:**

$F$  è il prezzo forward del sottostante

$K$  è lo strike dell'opzione

$H$  è il livello barriera

$\sigma$  è la volatilità del sottostante

$t$  è la vita residua dell'opzione

## 6.3 Analisi dei coefficienti di sensibilità delle reverse barrier option

### Le knock-in reverse barrier options

Come del resto già nel capitolo precedente, daremo inizio all'analisi con lo studio delle *knock-in option*. In particolare studieremo il comportamento di una *up and in call* in presenza delle seguenti caratteristiche contrattuali ed "ambientali": lo *strike* è posto uguale a  $K = 100\$$ , la barriera a quota  $H = 110\$$ , il tasso senza rischio è  $r_f = 5\%$ , mentre la volatilità, al solito, è collocata ad un livello  $\sigma = 15,7\%$ . In base a questi parametri siamo in grado di costruire, nel modo mostrato in figura 1, il grafico relativo all'andamento del premio in funzione del prezzo e della vita residua.

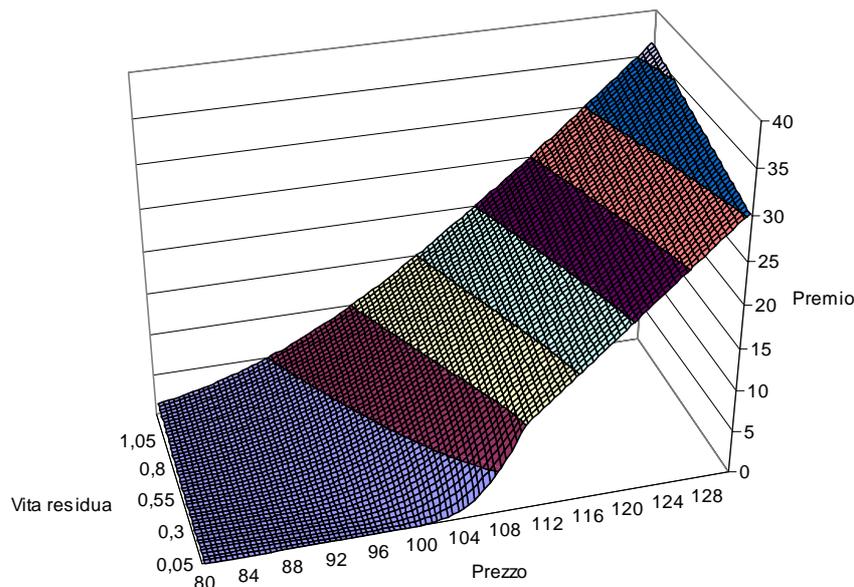
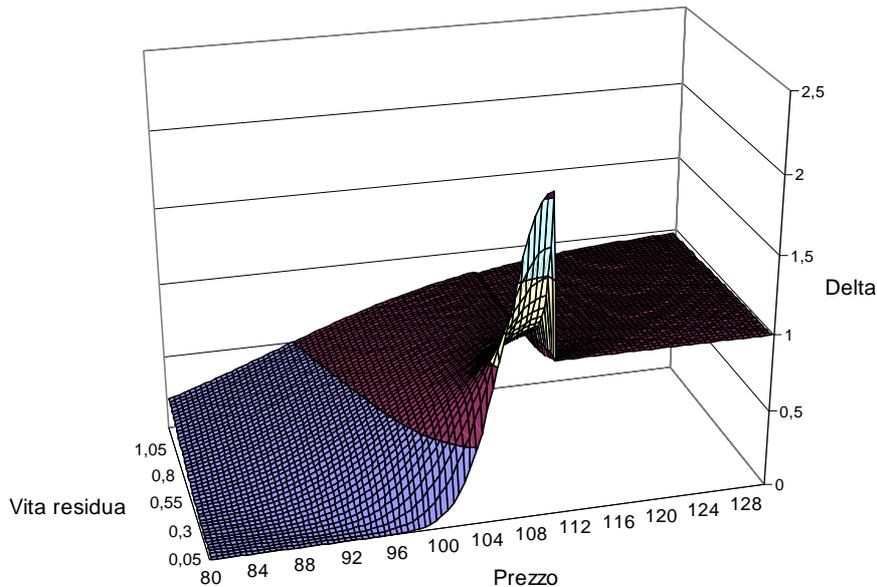


Figura 1 - Premio di una *up and in call* in funzione del prezzo del sottostante e della vita residua

Al di sopra di quota 110\$, in corrispondenza della quale è collocata la barriera, l'opzione si "trasforma" automaticamente nella corrispondente *vanilla call*. È il caso tuttavia di rimarcare come, per valori della vita residua sufficientemente alti, il cambiamento in questione risulti tutt'altro che visibile sul grafico, al contrario di quanto accade invece a poco tempo dalla scadenza: ciò è dovuto all'influenza che la vita residua ha sulle probabilità di perforamento della barriera. In effetti, con un'alta vita residua, la probabilità di "knocking-in" si mantiene elevata per valori del prezzo anche abbastanza lontani dalla barriera ed in particolare, per prezzi vicini alla stessa, risulta assai prossima ad uno: ciò permette un avvicinamento (per prezzi del sottostante crescenti a partire da sotto la barriera) del prezzo della *barrier* al valore (per  $S=H$ ) della *vanilla* molto più graduale di quanto non succeda ad un paio di settimane dalla scadenza; infatti, quando manca ormai poco all'estinzione dell'opzione, la probabilità di perforamento della barriera subisce una diminuzione considerevole, specialmente per prezzi

non vicinissimi a quest'ultima, rendendosi così necessaria, da parte del prezzo dell'opzione, una sorta di "rincorsa" al valore (per  $S=H$ ) della *vanilla* negli ultimi *tick* di prezzo a ridosso della barriera (poiché soltanto appena al di sotto di questa la probabilità di perforamento ritorna rapidamente a livelli elevati). Del resto basti considerare come, ad un paio di settimane dalla scadenza, passando da uno spot di 107\$ ad uno di 109,5\$, il valore dell'opzione passa da 4\$ circa ad oltre 10\$. La funzione *Delta* non può che confermare quanto detto ed aiutarci a meglio comprendere il comportamento dell'opzione (figura 2).



**Figura 2** - *Delta* di una *up and in call* ( $K=100$ ,  $H=110$ ) in funzione del prezzo e della vita residua

Il grafico mostra, ovviamente, per una bassa vita residua, un picco (superiore a quota due) in corrispondenza della zona di prezzo a ridosso della barriera. Oltre i 110\$ troviamo il *Delta* della *vanilla* molto vicino all'unità: occorre infatti ricordare come la *vanilla* "nasca", al perforamento della barriera, abbondantemente *in the money*.

A grandi linee si può dire che il comportamento dell'opzione ricorda abbastanza da vicino, prima dell'eventuale perforamento della barriera, l'andamento di una *digital* americana. L'opzione presenta infatti, ad una prima occhiata, il medesimo profilo sia "spaziale" (al mutare del prezzo del sottostante) sia "temporale" (al mutare della vita residua) della *one touch digital*, né potrebbe essere diversamente se si tiene ben presente come il valore dell'opzione risieda interamente nella probabilità di perforamento della barriera e come esso sia dunque completamente di natura temporale e nemmeno in minima parte di natura intrinseca. Esistono tuttavia dei limiti a tali analogie: in effetti, osservando la figura 2, non si può fare a meno di notare come il *Delta* dell'opzione si mantenga insolitamente alto anche per valori della vita residua piuttosto elevati. In base alle analogie rilevate rispetto alla *digital*, ci saremmo aspettati (per un'elevata vita residua) un declino del *Delta* all'avvicinarsi del prezzo alla barriera<sup>6</sup>. Nel nostro caso invece, non solo ciò non avviene, ma si rileva una tendenza della greca (il *Delta*) addirittura all'aumento (per quanto moderato). La ragione di tale divergenza sta nel fatto che, mentre nel caso della *digital*, all'aumentare del prezzo sottostante, sale soltanto la probabilità di ottenere la somma unica  $X$  (che rimane la medesima

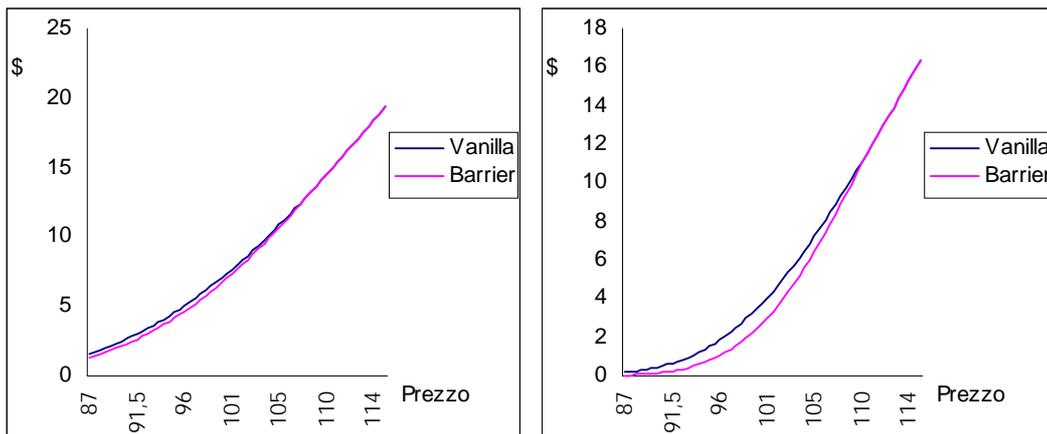
<sup>6</sup> Il lettore recuperi le considerazioni effettuate nella quarta parte in merito al *drift* e alla sua influenza sul *Delta* nelle *american digital*.

indipendentemente dall'ampiezza con cui la barriera verrà perforata), nel caso della *up and in call* a salire invece è anche la probabilità di raggiungere *payoff* più ricchi: questo spiega la tendenza del premio a salire sempre più rapidamente all'avvicinarsi del *trigger* (la barriera).

Cercando di tirare le fila del discorso potremmo dire che l'opzione si comporta in maniera molto simile ad una *digital* soprattutto in presenza di una bassa vita residua: in questo caso infatti la difficoltà per il prezzo di raggiungere valori molto elevati (data l'esiguità del tempo a disposizione) attutisce la "variabilità" di *payoff* della *barrier*, avvicinandola in questo modo alla *digital*. Al contrario, per un'alta vita residua, l'elevata probabilità di *knocking-in*, unitamente alle considerazioni sopra svolte, porta la *barrier* a comportarsi in maniera più simile ad una semplice *vanilla* che non ad una *digital*, un po' come se la quasi sicurezza di perforamento della barriera inducesse l'opzione ad "anticipare i tempi", agendo fin da subito nel modo con cui è probabile che si trovi ad agire in futuro (da *vanilla*).

A conferma di quanto detto si riportano in figura 3 i grafici in due dimensioni rappresentanti in un'unica soluzione tanto l'andamento (rispetto al sottostante) della *up and in call* quanto di una *vanilla* (con medesimo *strike*), in presenza di una vita residua rispettivamente di nove e tre mesi (inoltre  $K=100$ €,  $H=110$ €).

**Figura 3** - Confronto tra i valori di una *up and in call* e di una *vanilla* a nove e a tre mesi dalla scadenza

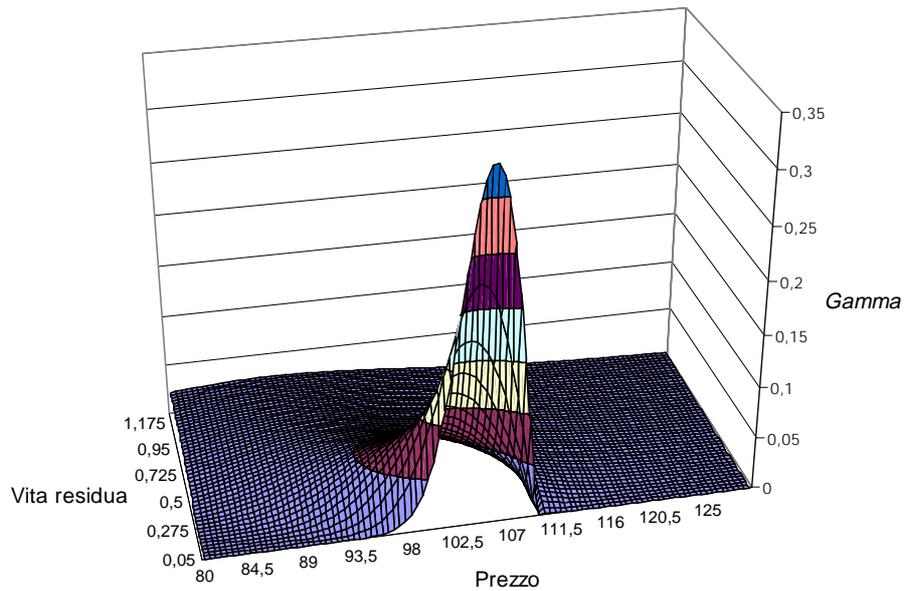


**a)** *Up and in call* e *vanilla* a 9 mesi dalla scadenza **b)** *Up and in call* e *vanilla* a 3mesi dalla scadenza

Non risulta particolarmente difficile verificare come la differenza di andamento tra *barrier* e *vanilla* sia particolarmente significativa nel solo secondo caso, ovvero in quello relativo ad una più bassa vita residua. Per il resto, la ragione per cui troviamo la *barrier* sempre al di sotto della *vanilla* è piuttosto banale: la *barrier* infatti, per poter offrire i medesimi *payoff* della *standard call*, deve preliminarmente veder perforata la barriera (evento questo dalla probabilità minore di 1).

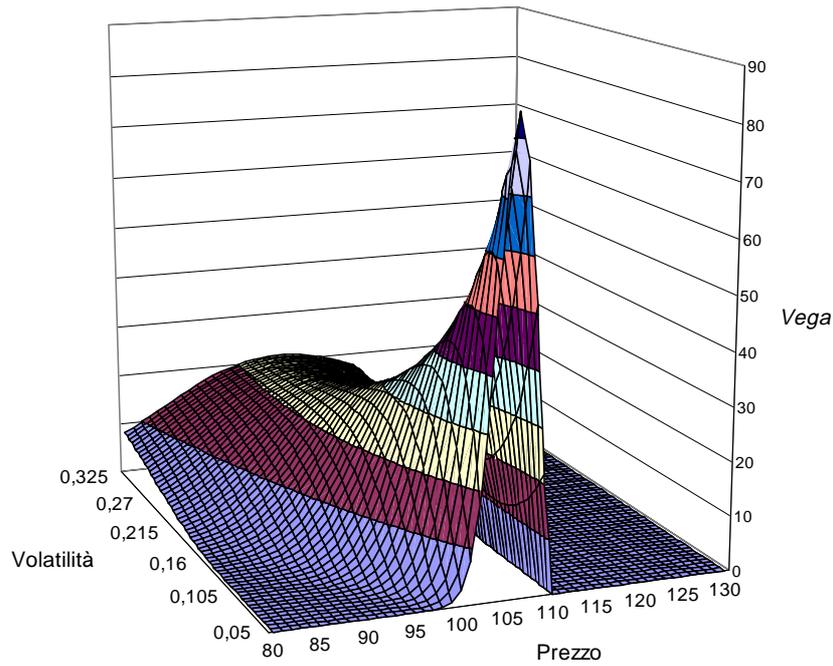
In base a quanto detto dobbiamo dunque aspettarci una funzione *Gamma* un po' diversa (specialmente per un'elevata vita residua) da quella di un'*american digital*. Il relativo grafico, reperibile in figura 4, sembra darci ragione.

Esso infatti presenta, come prevedibile, un *Gamma* sempre positivo, anche per vite residue elevate, laddove invece il *Gamma* della *digital* si rivelava per lunghi tratti negativo. Per il resto il grafico è molto simile a quello relativo alla *digital* stessa (soprattutto in caso di *drift* nullo).



**Figura 4** - *Gamma* di una *up and in call* ( $K=100$ ,  $H=110$ ) in funzione del prezzo e della vita residua

Passando ora allo studio della funzione *Vega* (figura 5), è il caso di precisare come, in questo caso, si sia preferito evitare di riportare all'interno del medesimo grafico, oltre quota 110\$, anche il *Vega* della *vanilla* (che al solito subentra alla *barrier* nella zona al di sopra della barriera): ciò per evitare un eccessivo appesantimento del grafico stesso. È il caso inoltre di precisare come quest'ultimo sia stato ottenuto in presenza di una vita residua di 3 mesi (nonché per  $K=100$ \$ ed  $H=110$ \$).

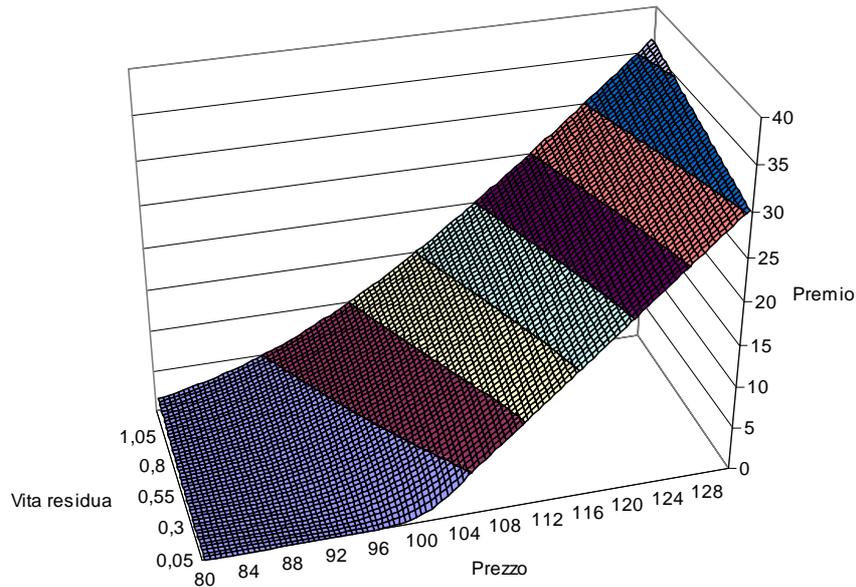


**Figura 5** - Vega di una *up and in call* in funzione del prezzo e di diversi livelli della volatilità

È impossibile non notare la schiacciante somiglianza che la funzione *Vega* presenta nei confronti dell'analoga "greca" relativa alle più volte menzionate *american digital*: come in queste ultime infatti, al diminuire della volatilità, il *Vega* tende a concentrarsi nella zona di prezzo a ridosso della barriera (tanto da arrivare a più che raddoppiare, per uno *spot* pari a 105\$ e per una volatilità che passasse dal 30 al 10%), diminuendo invece drasticamente, fino ad annullarsi, per prezzi lontani dalla stessa (in presenza delle medesime condizioni, per un prezzo tuttavia di 90\$, il *Vega* passa da 17 circa a praticamente zero). La spiegazione di tale andamento è piuttosto agevole ed il lettore potrà rinvenirla nel commento alla figura 6.7, nel capitolo dedicato alle *one touch digital*: le ragioni che sottostanno alla conformazione dei due grafici sono infatti le medesime.

Ciò che però può essere interessante notare è la tendenza del *Vega* della *barrier* a mantenersi relativamente alto anche in corrispondenza di elevate volatilità del sottostante: in altre parole troviamo, in questo caso, meno accentuato il divario esistente, per esempio, nelle *digital*, tra *Vega* registrabili a molto tempo dalla scadenza e *Vega* rilevabili in prossimità della barriera, quando la scadenza dell'opzione è ormai vicina. Se il lettore ricorda il contenuto del sesto capitolo, saprà allora che il basso *Vega* della *digital* riscontrabile in presenza di elevate volatilità implicite è dovuto al semplice fatto che, essendo la probabilità di perforamento della barriera molto elevata a causa appunto dell'alta volatilità, il beneficio derivante da un'ulteriore aumento di quest'ultima non può risultare molto significativo: nel nostro caso invece (*up and in call*) ulteriori aumenti della volatilità non vanno ad incidere soltanto sulla probabilità di *knocking-in* ma anche sul valore stesso della *vanilla* sottostante, con ulteriore vantaggio (da cui il maggior *Vega*) per il detentore dell'opzione.

Volendo tirare un po' le somme circa quanto visto in merito alle *up and in call*, possiamo senz'altro dire che, contrariamente a quanto ci si potesse aspettare, il comportamento di queste *reverse (knock-in)* non è poi così drammatico in vista di una copertura dei rischi connessi alla gestione delle stesse: presentano infatti problemi simili a quelli riscontrabili nell'utilizzo delle *digital* (che comunque sono tutt'altro che risibili), ma con qualche caratteristica "moderatrice".

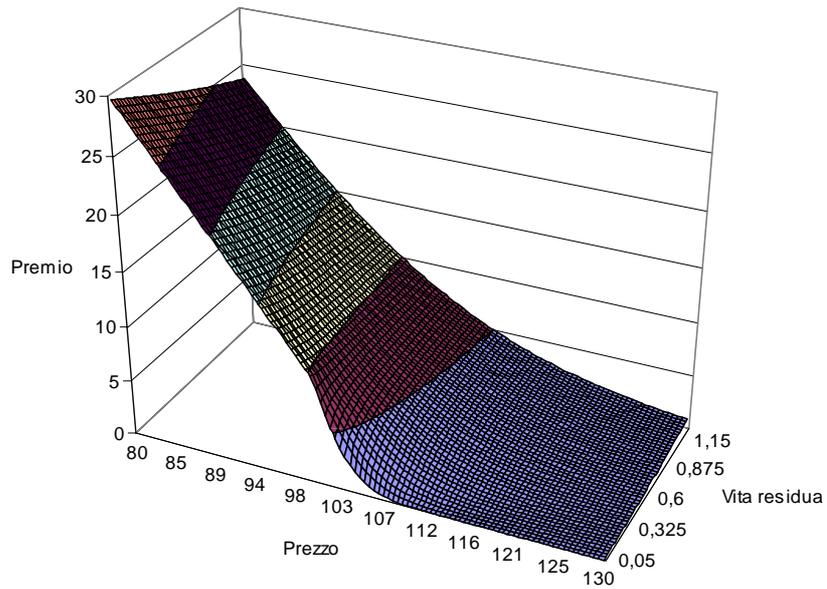


**Figura 6** - Premio di una *up and in call* con barriera posta a quota 105 anziché a quota 110

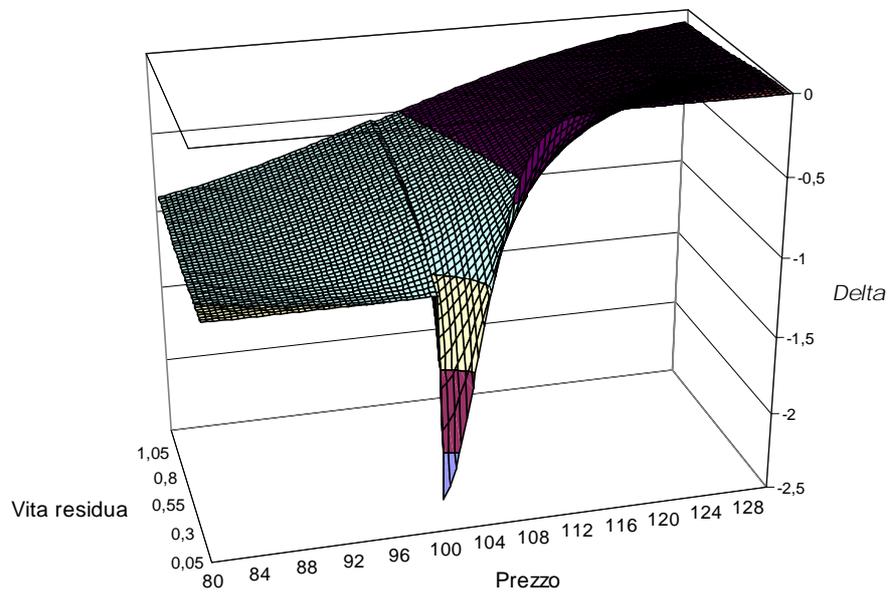
Infatti, a differenza delle *digital*, la “frattura” nel comportamento dell’opzione, rinvenibile in corrispondenza della barriera, è addolcita dalla presenza, come *payoff*, della *vanilla* al posto della somma fissa in denaro tipica delle *digital*: in effetti, al perforamento della barriera, il *Delta* della posizione non si annulla, come è invece naturale per le *binary*, bensì si assesta sul livello di una *vanilla* già consistentemente *in the money*: ciò riduce quell’effetto *Gamma* “improprio” che, come fatto notare nel sesto capitolo, gioca alquanto a sfavore del detentore, mentre rende al contempo meno significativi i problemi legati al fenomeno dello *slippage*. A coronamento delle osservazioni appena svolte può essere utile dare un’occhiata al grafico relativo al premio della medesima opzione appena esaminata, ma con una barriera più vicina allo *strike* ( $H=105\$$ ) (figura 6). Diminuendo il valore intrinseco della *vanilla* al momento del “*knocking-in*”, la *reverse* assume un comportamento più mansueto rispetto a quanto rilevato in precedenza: è lecito infatti dubitare che il lettore possa agevolmente distinguere il grafico della *up and in call* (con  $H=105\$$ ) da quello di una semplice *vanilla*.

Per quanto concerne l’altra *reverse knock-in*, ovvero la *down and in put*, essendo la struttura dell’opzione del tutto simmetrica a quella della *call*, essa presenta di conseguenza caratteristiche del tutto analoghe a quelle sfoggiate da quest’ultima (si veda la figura 7 ed 8). Al solito, ad introdurre qualche minimo elemento di differenziazione è la presenza del *drift*, che, ovviamente, è il solo a non rispettare la simmetria di cui sopra.

La conseguenza più interessante legata al problema *drift* è rappresentata dalla presenza di un *Delta* mediamente più basso, in termini assoluti, rispetto a quello della *call* (la media dei valori del *Delta*, rappresentati nel relativo grafico, è di  $-0,28$  per la *down and in put* contro lo  $0,47$  della *up and in call*). Infatti il *drift* rende meno “atingibili” i *payoff* più ricchi della *put* sottostante, con la conseguenza di moderare la crescita di valore dell’opzione al diminuire del prezzo. Chiaramente il *drift* gioca un ruolo opposto in presenza di una bassissima vita residua, quando cioè l’opzione diventa praticamente una *digital*: a quel punto conta solo la probabilità di *knocking-in*, ed il *drift*, abbassandola, rende l’opzione più sensibile alle diminuzioni del prezzo; la conseguenza è un *Delta* più elevato ( $2,2$  contro il  $2$  della *call*). Il *Gamma*, dal canto suo, è praticamente indistinguibile dalla controparte *call* (come del resto il *Vega*).



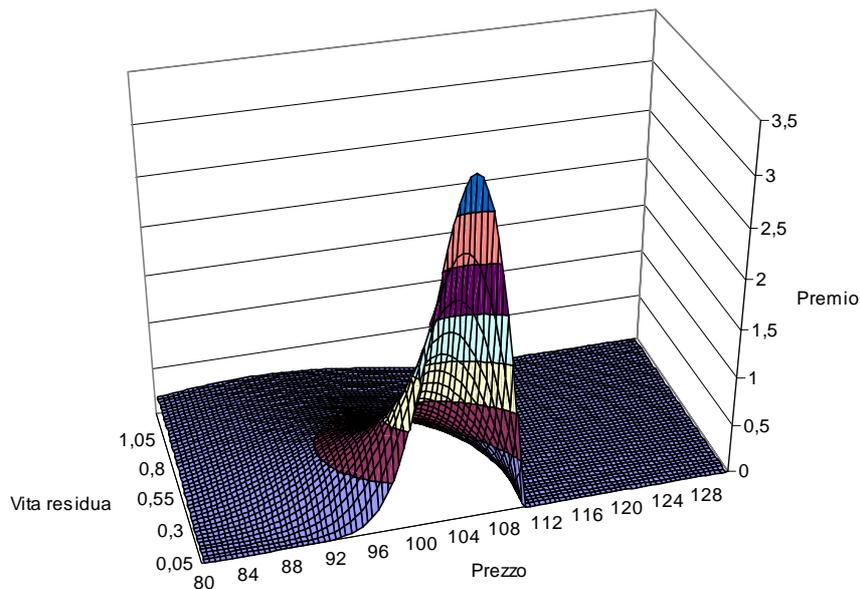
**Figura 7** - Premio di una *down and in put* al variare del prezzo e della vita residua ( $K=110, H=100$ )



**Figura 8** - Delta di una *down and in put* al variare del prezzo e della vita residua ( $K=110, H=100$ )

## Le knock-out reverse barrier options

A questo punto ci si potrà chiedere a cosa si debba la cattiva fama di cui godono le *reverse barrier*. Forse un suggerimento in tal senso lo può offrire il grafico riportato in figura 9, relativo all'andamento del premio di una *up and out call* (*strike*, barriera, tasso e volatilità sono gli stessi della *knock-in*, ovvero rispettivamente 100\$, 110\$, 5% e 15,7%).



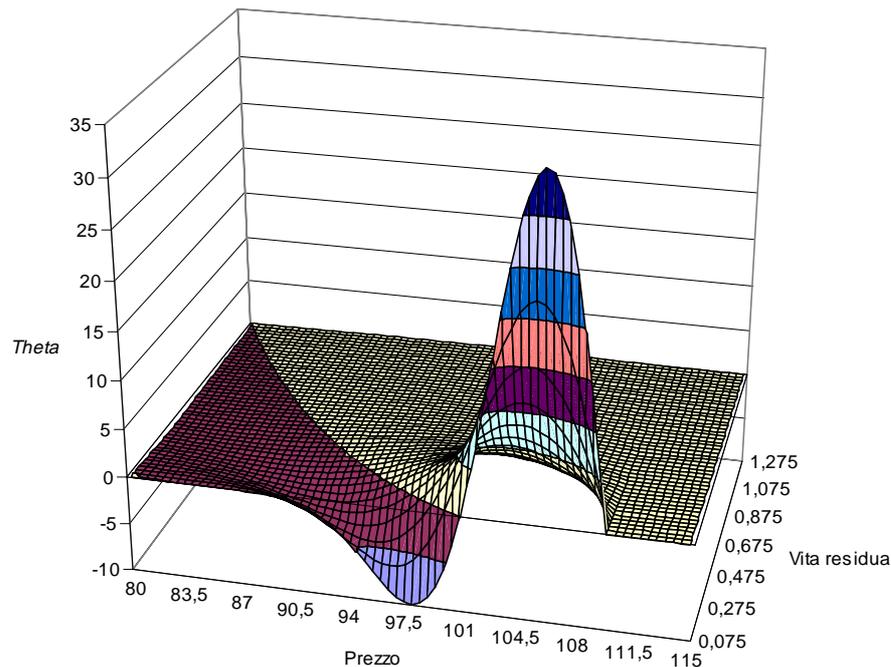
**Figura 9** - Premio di una *up and out call* ( $K=100$ ,  $H=110$ ) in funzione del prezzo e della vita residua

Il lettore non si lasci confondere dalla forma del grafico: non si tratta della funzione *Gamma*, bensì proprio dell'andamento del premio dell'opzione in relazione al mutare del prezzo e della vita residua. Tale tormentata forma è il frutto dell'incontro-scontro tra le due abituali componenti del valore della *knock-out*: la componente "vanilla" e la componente "barriera". La prima tenderebbe ovviamente a far crescere indefinitamente il valore dell'opzione all'aumentare del prezzo del sottostante mentre la seconda, algebricamente negativa, aumentando in valore assoluto all'avvicinarsi della barriera, opererebbe evidentemente in senso opposto. A questo punto la spiegazione della strana conformazione del grafico si offre da sé: per prezzi sufficientemente<sup>7</sup> lontani dalla barriera prevale la componente "vanilla", mentre per prezzi abbastanza elevati (e dunque vicini alla barriera) domina incontrastata la componente "barriera". Non a caso infatti, per qualsiasi vita residua, il premio raggiunge il proprio massimo prima della barriera, per poi calare, a seconda del tempo mancante prima della scadenza, più o meno rapidamente fino a quota zero in corrispondenza di  $S=H$ . Dovrebbe poi essere chiaro per il lettore il modo con cui la vita residua influenza la lotta tra le due componenti sopra menzionate: un'alta vita residua mantiene elevata la probabilità di "knocking-out" anche per prezzi piuttosto lontani dalla barriera, portando quindi la componente omonima a prevalere su una più vasta porzione di grafico; al contrario una bassa vita residua, riducendo drasticamente, per prezzi distanti dalla barriera, le probabilità di perforamento di quest'ultima, comporta per la componente "esotica" (non *vanilla*) una severa

<sup>7</sup> Questo avverbio presenta significati diversi a seconda della vita residua.

limitazione della propria influenza alla sola zona di prezzo posta a ridosso della barriera (in corrispondenza della quale le possibilità di *knocking-out* rimangono per forza di cose elevate). Volendo offrire un esempio numerico di quanto detto, basti considerare che, per una vita residua  $t=1$  anno, il valore dell'opzione raggiunge il proprio apice per  $S=92\$$ , per  $t=3$  mesi lo raggiunge a quota  $S=100,5\$$ , mentre per  $t \approx 2$  settimane circa si riscontra il massimo valore in corrispondenza di  $S=105\$$  circa: ciò è dovuto al fatto che la componente barriera, responsabile della diminuzione del valore dell'opzione, perde forza con il passare del tempo, per riacquistarla soltanto per valori del prezzo sottostante sempre più vicini alla barriera (ovviamente la "forza" di cui parliamo non è altro che la probabilità di *knocking-out*).

Per quanto concerne l'andamento del premio al passare del tempo, anche in questo caso a venirci in aiuto è la più volte utilizzata distinzione tra componente *vanilla* e componente barriera: dove prevale la prima componente (e dove dunque la probabilità di *knocking-out* è bassa) l'opzione, comportandosi di fatto da *vanilla* (o quasi), vede il proprio valore scemare con il passaggio del tempo, mentre, laddove a prevalere è la componente barriera (con un'alta probabilità di perforamento della stessa), il premio non può che trarre vantaggio dalla diminuzione della vita residua, poiché un calo di quest'ultima limita evidentemente le nefaste possibilità di *knocking-out*, salvaguardando l'esistenza stessa dell'investimento. La figura 10, relativa all'andamento della funzione *Theta*, offre una facile opportunità di verifica di quanto affermato.



**Figura 10** - *Theta* di una *up and out call* ( $K=100, H=110$ ) al variare del prezzo e della vita residua

Preoccupante<sup>8</sup>, nell'ottica del *writer*, è l'intensissimo aumento di valore (legato al passare del tempo) che l'opzione registra, in prossimità della barriera, a poco tempo dalla scadenza: in linea di principio tale svantaggio dovrebbe essere compensato (come il grafico relativo poi conferma) da un effetto *Gamma* particolarmente favorevole; ciò tuttavia non impedisce alla

<sup>8</sup> Si veda in proposito anche Taleb (1997: 357).

posizione di assumere, se coperta tramite sottostante, connotati di rischio tutt'altro che indifferenti (la compensazione ha luogo "in media").

Nelle figure 11 e 12 sono riportati i grafici relativi alla funzione *Delta* e alla funzione *Gamma* della *up and out call*. Ovviamente non può destare sorpresa, dopo quanto visto, il cambio di segno nella funzione *Delta*, che passa regolarmente da valori positivi, finché a prevalere è la componente *vanilla* (per prezzi lontani dalla barriera), a valori negativi, quando la questione barriera assume invece un ruolo determinante: volendo offrire qualche cifra a riguardo si consideri che, ad un paio di settimane dalla scadenza, il *Delta* passa dallo 0,4 rilevabile a quota  $S=103\$$  al  $-1$  riscontrabile per  $S=109\$$ .

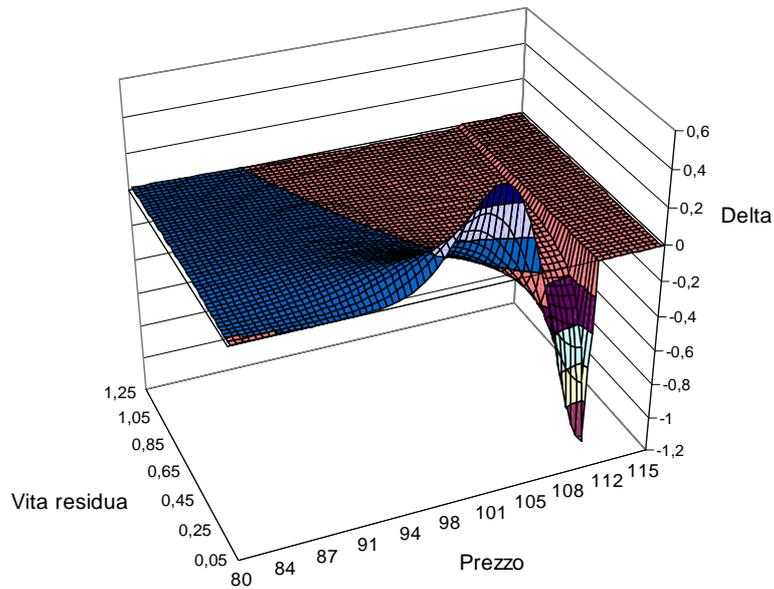
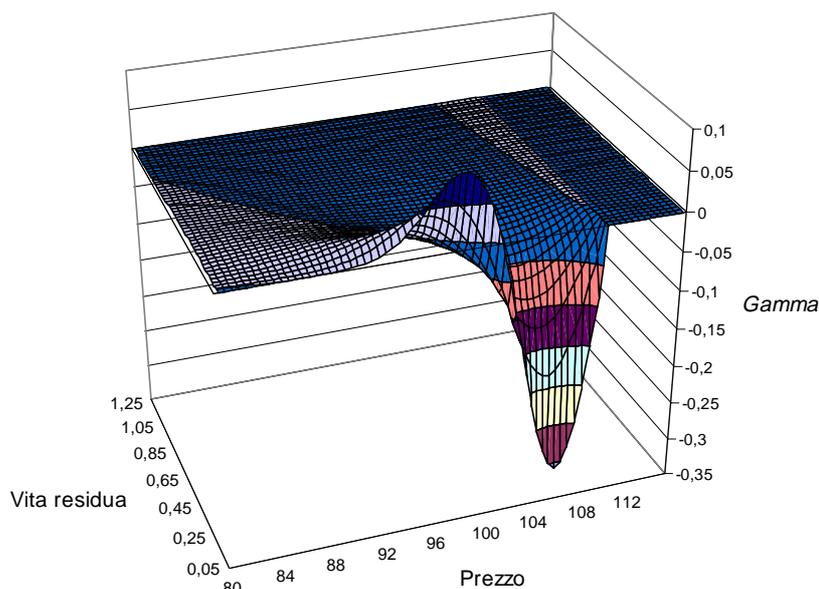


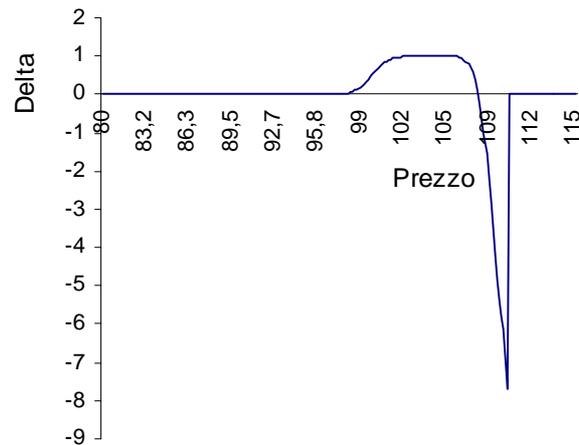
Figura 11 - *Delta* di una *up and out call* ( $K=100, H=110$ ) in funzione del prezzo e della vita residua



**Figura 12** - *Gamma* di una *up and out call* ( $K=100$ ,  $H=110$ ) in funzione del prezzo e della vita residua

Interessante è rilevare come, per una vita residua sufficientemente elevata, il *Delta* della *barrier* si presenti, in termini assoluti, praticamente quasi nullo: in effetti, a nove mesi dalla scadenza, il *Delta*, positivo o negativo che sia, non supera mai lo 0,037 in valore assoluto. Un discorso analogo vale per la funzione *Gamma*. Chiaramente il fenomeno si spiega con una precoce (ovvero già per prezzi piuttosto bassi) prevalenza della componente barriera, il che di fatto impedisce al valore dell'opzione di raggiungere livelli massimi significativi: in altre parole il premio rimane praticamente azzerato o quasi per qualsiasi valore del sottostante (non riesce a decollare).

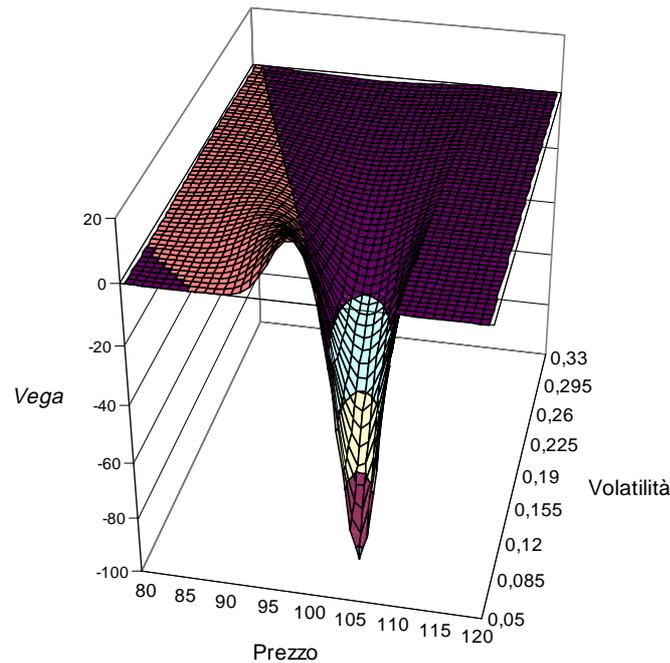
Ben diverso si presenta il discorso in presenza di una bassa vita residua: in questo caso la netta prevalenza, per prezzi non vicinissimi alla barriera, della componente *vanilla* permette all'opzione di acquisire gran parte del valore intrinseco situato nella zona compresa tra *strike* e barriera; ciò le consente di raggiungere livelli massimi (di valore) piuttosto significativi, da cui poi, quando il prezzo raggiunge la zona a ridosso della barriera (e la probabilità di *knocking-out* cresce vertiginosamente), dovrà rapidamente decadere fino all'annullamento. Ovviamente una tale situazione ha come conseguenza diretta la formazione, a ridosso della barriera, di un *Delta* negativo potenzialmente illimitato. A scopo esemplificativo si riporta in figura 13 il grafico relativo all'andamento della funzione *Delta* in presenza di una vita residua di un solo giorno (il grafico tridimensionale precedente si fermava infatti ad oltre due settimane dalla scadenza).



**Figura 13** - Delta di una *up and out call* ( $K=100$ ,  $H=110$ ) ad un giorno dalla scadenza

Il *Delta*, come si può facilmente notare, è praticamente uguale a quello di una *vanilla* (anch'essa prossima a scadenza) fino a quota 107\$: al di là di questa soglia la forte vicinanza della barriera affossa rapidamente l'opzione. Il *Delta* negativo raggiunto nel grafico (circa  $-7,7$ ), pur notevole, è soltanto un accenno ai livelli teoricamente accessibili per la *up and out call*: basterebbe spostare lo *strike* da 100 a 90\$ (aumentando considerevolmente il valore intrinseco al momento del *knocking-out*) per vedere il nostro *Delta* raggiungere agilmente quota  $-17$  circa o più.

La funzione *Gamma* (figura 12), soprattutto a poco tempo dalla scadenza, conferma il carattere non proprio docile delle *reverse knock-out*: non solo presenta la poco simpatica caratteristica di *risk-reversal* (basti pensare che, ad un paio di settimane dalla scadenza, il *Gamma* passa dallo 0,1 circa rilevabile a quota 98\$ al  $-0,3$  riscontrabile per un prezzo del sottostante pari a poco più di 100\$) ma raggiunge livelli assoluti semplicemente da record. Del resto occorre pensare che, ad un istante dalla scadenza, il *Delta* dell'opzione, in corrispondenza della barriera, passa da 1 a  $-\infty$  nello spazio di un infinitesimo incremento di prezzo (l'*american digital*, se non altro, si accontentava di passare da 0 a  $+\infty$ ). Quanto appena detto mette in condizioni di comprendere agevolmente il motivo per cui il *Delta hedging* delle *reverse knock-out* (specialmente a poco tempo dalla scadenza) rappresenti un'attività tutt'altro che consigliabile. A completamento dell'analisi delle *up and out call* non poteva certo mancare il contributo della funzione *Vega*, il cui andamento è riportato in figura 14. Ormai il lettore dovrebbe aver fatto l'abitudine all'andamento sinusoidale (si ricorda che il grafico è stato ottenuto per una vita residua di 3 mesi) di queste greche: nella fattispecie il *Vega* negativo, riscontrabile nella zona di prezzo adiacente alla barriera, si spiega con l'influenza nefasta che un aumento della volatilità inevitabilmente produce sulla probabilità di *knocking-out* dell'opzione e dunque sul valore di quest'ultima. Per prezzi sufficientemente lontani dalla barriera, comportandosi l'opzione in maniera analoga ad una *vanilla*, il *Vega* torna ai tradizionali valori positivi. Per volatilità di partenza piuttosto basse il *Vega* può inoltre raggiungere valori negativi di spicco (sotto  $-80$ ): infatti la bassa volatilità (unitamente alla presenza di uno *spot* vicino alla barriera) mantiene la probabilità di *knocking-out* a livelli tali (non troppo alti) da risultare notevolmente sensibili ad aumenti della volatilità stessa. L'andamento sinusoidale cui abbiamo sopra accennato e che il *Vega* condivide, in special modo, con la funzione *Gamma*, rende estremamente arduo ogni tentativo tradizionale di copertura dei rischi corrispondenti.

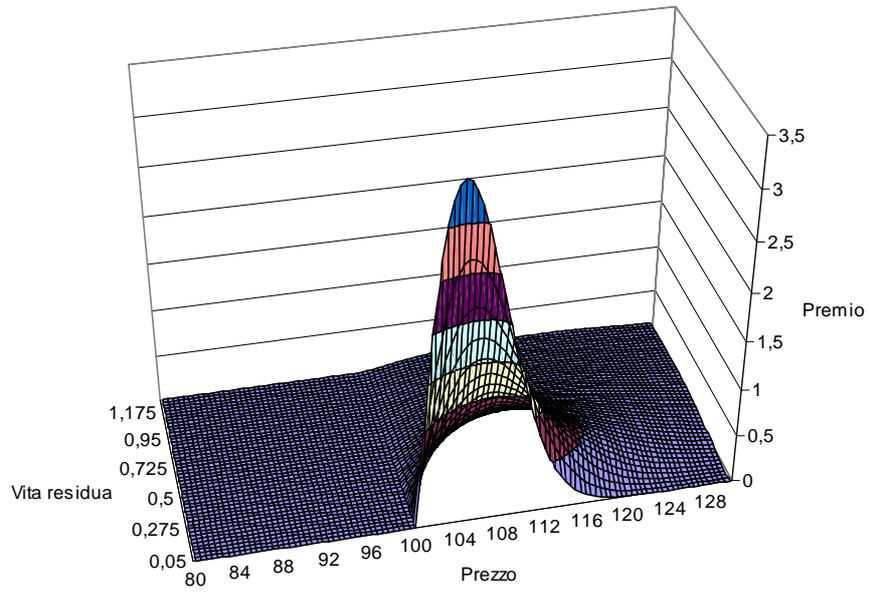


**Figura 14** - Vega di una *up and out call* ( $K=100, H=110$ ) in funzione del prezzo e della vita residua

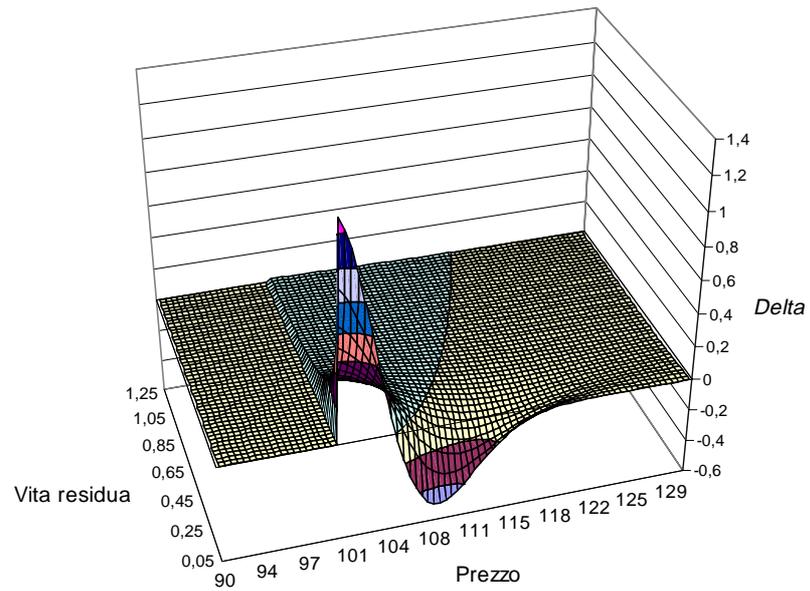
In altre parole l'utilizzo a tal fine di *vanilla* (da non confondersi con l'uso di combinazioni delle stesse finalizzate alla replica del valore della *barrier*) non può che offrire risultati pessimi, per la banale ragione che il *Gamma* ed il *Vega* della *barrier* cambiano in maniera troppo drastica al mutare del prezzo sottostante e della vita residua perché una struttura semplice quale una *vanilla* possa tener loro dietro. Volendo offrire qualche cifra in merito al comportamento del *Vega* di una *up and out call*, basti solo considerare che, in presenza di una volatilità di partenza del 10%, passando da uno spot di 95\$ ad uno di 104\$, il *Vega* passa da 8,6 a  $-33,7$ .

Rimane da spendere qualche parola riguardo l'altra *reverse knock-out*: la *down and out put* (figura 15). Al solito la simmetria strutturale tra *call* e *put* della stessa famiglia (nella fattispecie *knock-out*) rende del tutto adattabili al caso della *put* le considerazioni finora effettuate in merito alla *call*. Altrettanto al solito la questione *drift* introduce alcuni minimi elementi di differenziazione: nel nostro caso infatti il *drift* positivo accentua la pendenza della funzione a ridosso della barriera. Ovviamente ciò è dovuto all'influsso moderatore che esso produce sulla probabilità di *knocking-out* dell'opzione a ridosso della barriera. Tale fenomeno ha come conseguenza chiaramente non solo un aumento del *Delta* (che nel caso della *down and out put* raggiunge un massimo collocabile, ad un paio di settimane dalla scadenza, ad oltre quota 1,2, contro l'1 riscontrabile per le *up and out call*: si veda figura 16) ma anche un più elevato *Gamma*.

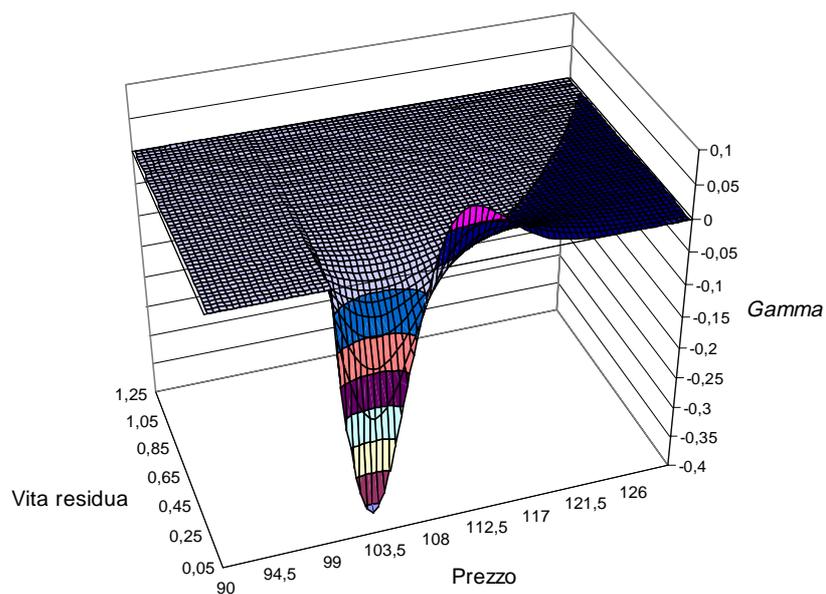
L'influsso "moderatore" di cui sopra costringe infatti il *Delta* a raggiungere quota zero (in corrispondenza della barriera) in un più breve "range" di prezzo, con l'ovvia conseguenza di un aumento del *Gamma* (che è la derivata del *Delta*) (figura 17).



**Figura 15** - Premio di una *down and out put* ( $K=110, H=100$ ) in funzione del prezzo e della vita residua

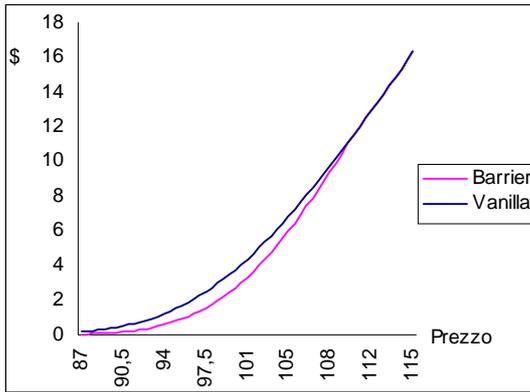


**Figura 16** - *Delta* di una *down and out put* ( $K=110, H=100$ ) in funzione del prezzo e della vita residua

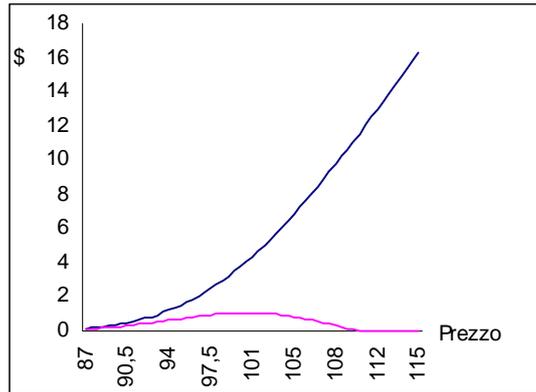


**Figura 17** - Gamma di una *down and out put* ( $K=110$ ,  $H=100$ ) in funzione del prezzo e della vita residua

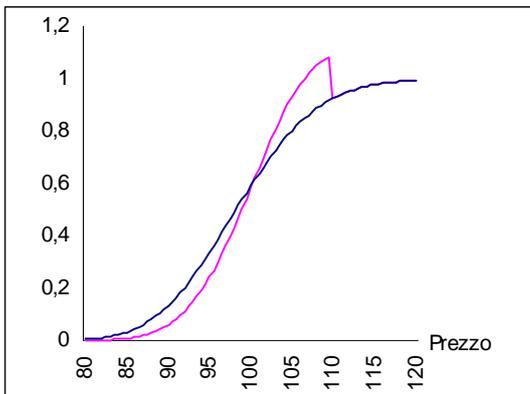
Come già effettuato per le *regular barrier*, si riportano nelle pagine seguenti dei prospetti riassuntivi relativi all'andamento del premio e delle principali greche per ciascuna delle *reverse barrier* qui trattate. I grafici sono stati ottenuti per una vita residua pari a 3 mesi; i restanti parametri sono gli stessi utilizzati finora.



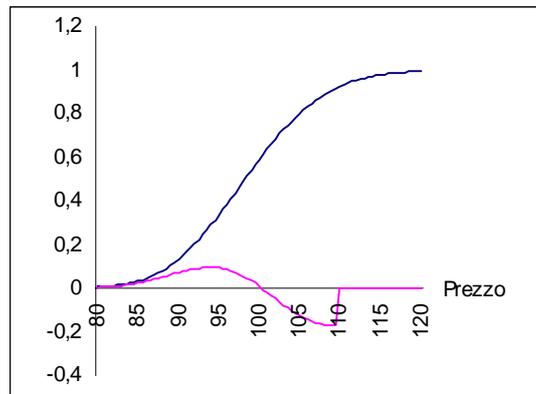
a) Premio di una up and in call ( $K=100\$;H=110\$$ )



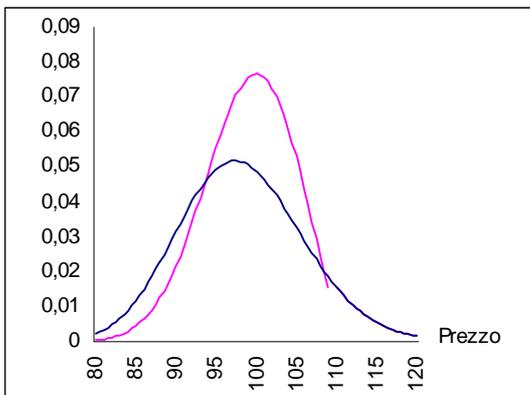
d) Premio di una up and out call ( $K=100\$;H=110\$$ )



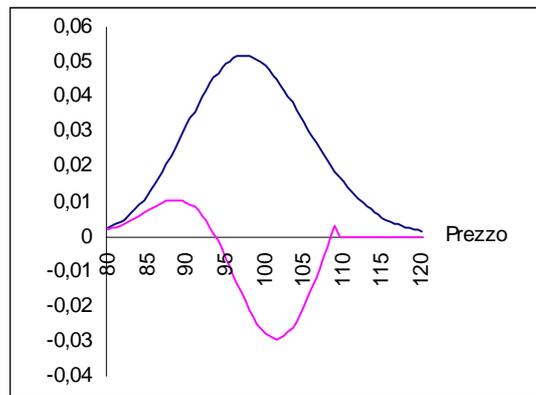
b) Delta di una up and in call ( $K=100\$;H=110\$$ )



e) Delta di una up and out call ( $K=100\$;H=110\$$ )

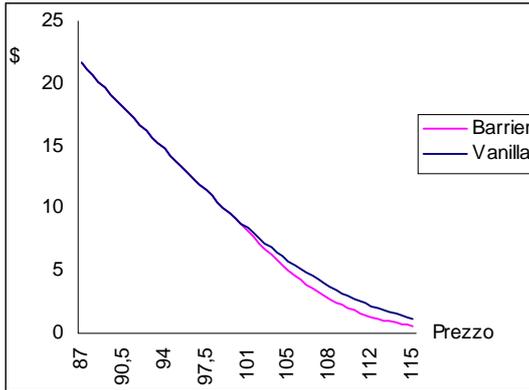


c) Gamma di una up and in call ( $K=100\$;H=110\$$ )

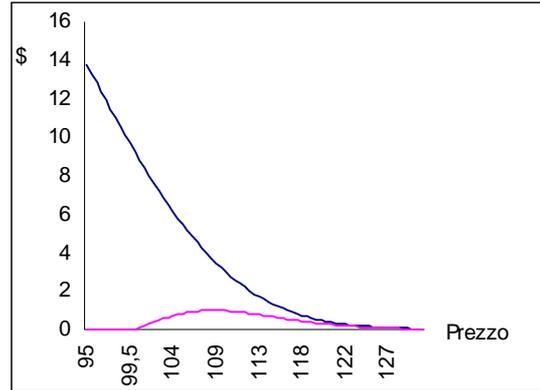


f) Gamma di una up and out call ( $K=100\$;H=110\$$ )

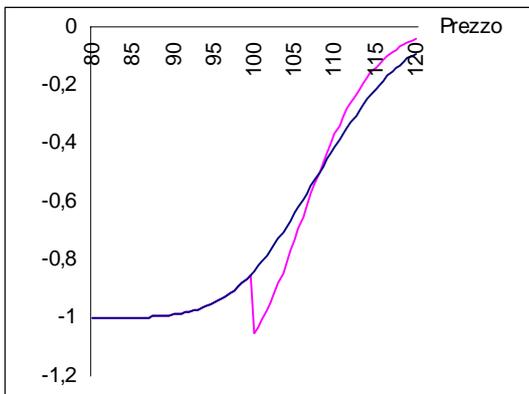
**Prospetto 1** - Premio, Delta e Gamma delle up and in call nonché delle up and out call



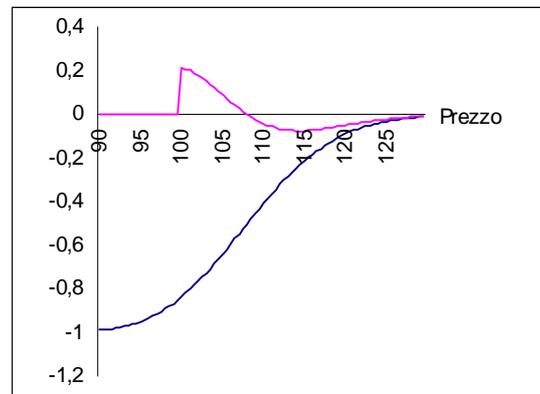
a) Premio di una down and in put ( $K=110\$;H=100\$$ )



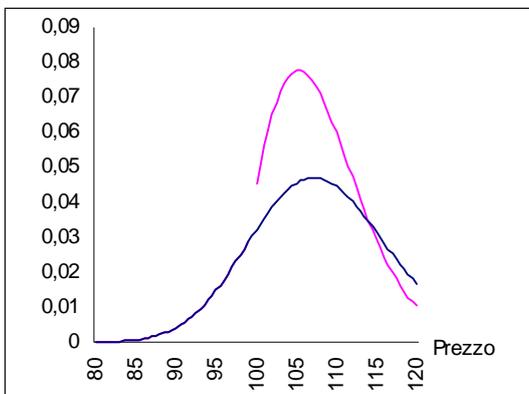
d) Premio di una down and out put ( $K=110\$;H=100\$$ )



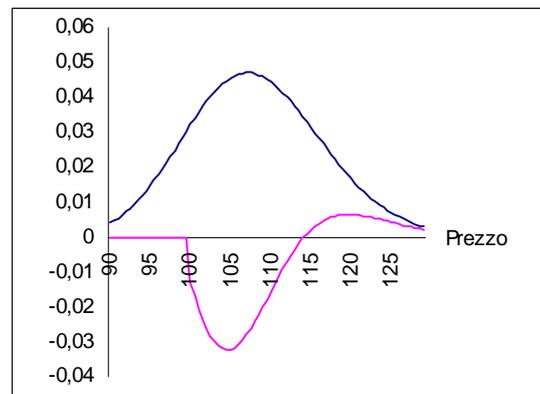
b) Delta di una down and in put ( $K=110\$;H=100\$$ )



e) Delta di una down and out put ( $K=110\$;H=100\$$ )

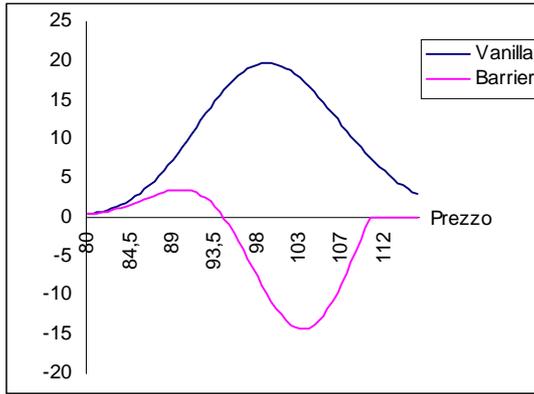


c) Gamma di una down and in put ( $K=110\$;H=100\$$ )

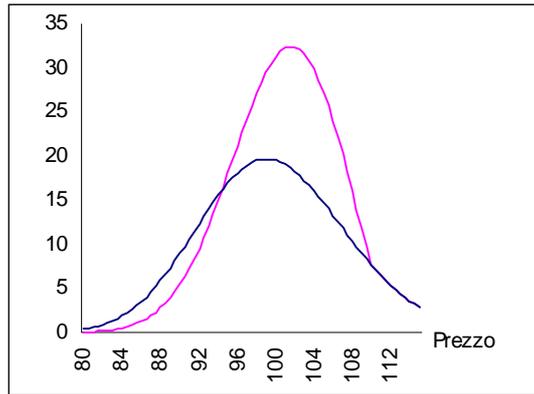


f) Gamma di una down and out put ( $K=110\$;H=100\$$ )

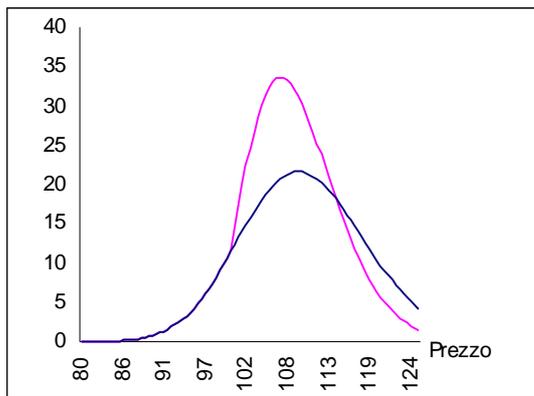
**Prospetto 2** - Premio, Delta e Gamma delle down and in put nonché delle down and out put



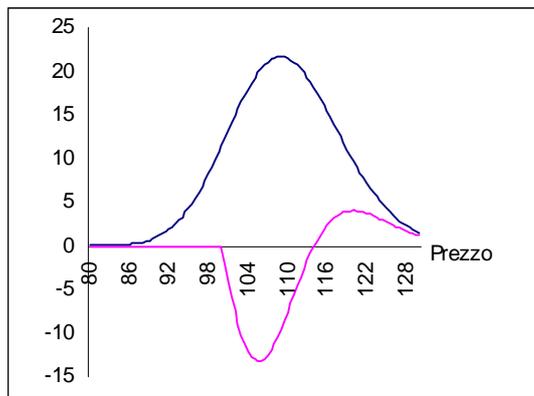
a) Vega di una *up and out call* ( $K=100\$;H=110\$$ )



b) Vega di una *up and in call* ( $K=100\$;H=110\$$ )



c) Vega di una *down and in put* ( $K=110\$;H=100\$$ )



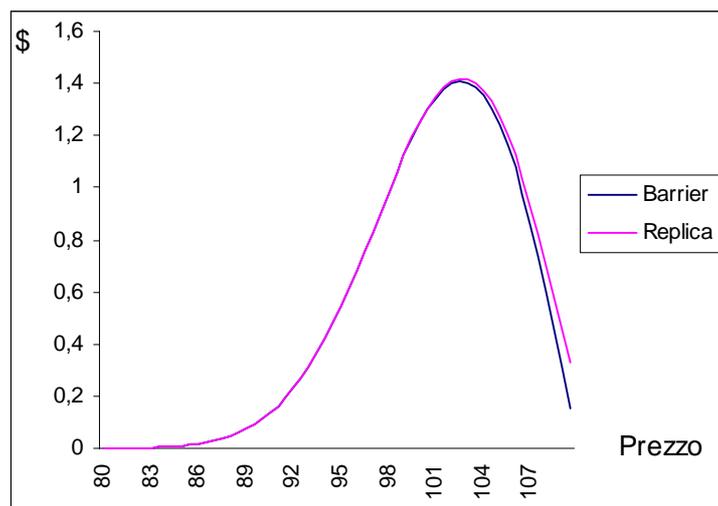
d) Vega di una *down and out put* ( $K=110\$;H=100\$$ )

**Prospetto 3 - Vega delle reverse barrier options**

## 6.4 La copertura delle *reverse barrier option*

Diversamente da quanto osservato per le *regular barrier options*, nel caso delle *reverse* non è possibile implementare una copertura statica dotata della medesima semplicità ed efficacia. Oltretutto, se nel caso delle *regular*, dato il *Gamma* piuttosto modesto delle stesse (che nel caso delle *knock-out* è addirittura inferiore a quello di una *vanilla*), era praticabile con una certa efficacia anche il *Delta hedging*, per le *reverse* il discorso è completamente diverso<sup>9</sup>: il valore intrinseco di cui l'opzione è dotata in corrispondenza della barriera introduce nella struttura delle stesse alcune *feature* tipiche delle *american digital*, con la conseguenza di rendere il *dynamic hedging* estremamente difficile, in particolar modo a ridosso della barriera e per basse vite residue. Nel caso specifico delle *reverse knock-out* il problema risulta aggravato dalla natura profondamente instabile dell'opzione che, come si ha avuto modo di constatare nel precedente paragrafo, non presenta una sola greca che possa dirsi immune dalla caratteristica forma sinusoidale (e quindi vedi problemi connessi al *risk-reversal*). Ad ogni modo cercheremo, in queste brevi pagine, di offrire al lettore qualche metodo alternativo di copertura statica che, se non perfetto, quantomeno risulti preferibile ad un pessimo *Delta hedging*. Oggetto privilegiato dei nostri sforzi sarà una *up and out call* (senza *rebate*) dotata delle medesime caratteristiche assegnatele nel paragrafo precedente ( $K=100\$$ ;  $H=110\$$ ).

Durante lo studio dei coefficienti di sensibilità delle *reverse knock-in* abbiamo accennato ad una forte somiglianza del comportamento dell'opzione a quello di una *american digital*, in particolar modo (o per meglio dire quasi esclusivamente) per una bassa vita residua. Poiché, in base alle relazioni più volte citate, il valore di una *up and out call* è uguale a quello di una *vanilla* diminuito di una *up and in call* (entrambe dotate del medesimo *strike*), possiamo sperimentare una replica della *knock-out* costituita dall'acquisto della *vanilla* sottostante nonché dalla vendita di una *american digital* dotata di una barriera analoga a quella della *barrier* e con un *payoff* pari al valore intrinseco che quest'ultima perde al momento del *knocking-out*.

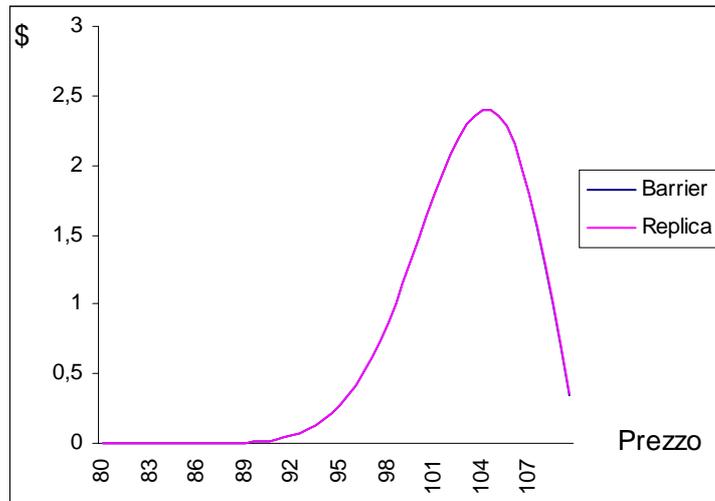


**Figura 18 - Valore della *up and out call* e della replica (tramite *vanilla* e *digital*) a 2 mesi dalla scadenza**

<sup>9</sup> Si veda infatti Tompkins (1997: 23-24).

La figura 18 rappresenta un raffronto tra l'andamento della nostra replica (acquisto di una *vanilla* e vendita di una *american digital*) e quello della *up and out call* in presenza di una vita residua pari a due mesi e di un *drift* nullo (da intendersi uguaglianza tra tasso domestico e tasso sulla valuta merce nel caso di opzioni valutarie oppure come ovvia conseguenza del riferimento a prezzi *forward*).

Come si può facilmente constatare la replica si comporta molto bene specialmente per prezzi non adiacenti la barriera. La ragione di tale comportamento il lettore la può rinvenire nelle considerazioni svolte nella prima parte del terzo paragrafo. Sempre in tali considerazioni è da ricercare la spiegazione della spiccata convergenza che il comportamento della replica mostra nei confronti della *up and out call* al passare del tempo (si veda in proposito la figura 19 relativa ad una vita residua di soli 30 giorni).



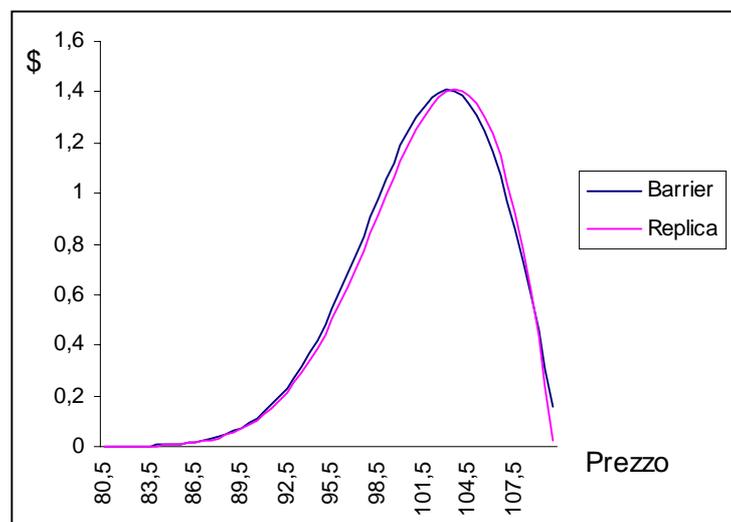
**Figura 19** - Valore della *up and out call* e della replica ad 1 mese dalla scadenza

Nell'osservare la figura 19 non si può far altro che constatare come la replica "copra" nel vero senso della parola la *barrier option*. A dire il vero una replica perfetta, anche per una vita residua elevata, è possibile ottenerla modificando leggermente, nel modo più avanti specificato, la replica appena utilizzata. Il metodo tuttavia (anche modificato) non è esente da difetti. In particolare sussiste una questione liquidità: spesso infatti le quotazioni spuntabili sul mercato di strumenti derivati complessi, quali sono le *american digital*, si discostano dai livelli teorici di equilibrio, ovviamente a sfavore di chi li negozia a fini di copertura.

Lasciando quindi da parte questo esempio scolastico di copertura statica passiamo in rassegna alcuni approcci più affidabili, meglio utilizzabili nella pratica del mercato. Un primo metodo di copertura alternativo potrebbe essere costituito<sup>10</sup> dall'acquisto della *vanilla* sottostante affiancato dalla vendita di altre *vanilla* (che farebbero dunque le veci della scomoda *digital* di cui sopra), il cui *strike* ed ammontare sarebbe da determinarsi attraverso una procedura numerica volta a ridurre al minimo gli scostamenti al quadrato registrabili tra replica e *barrier*. In base a tale metodo dobbiamo dunque vendere (in aggiunta all'acquisto della *vanilla* sottostante con *strike* identico a quello della *barrier*), in presenza di una volatilità del 15,7% e di una vita residua di 2 mesi, una quantità di 1,907 *vanilla* dotate di *strike* fissato a quota 105,6472\$. La figura 20 mostra il profilo della replica così ottenuta a confronto con quello della *reverse*.

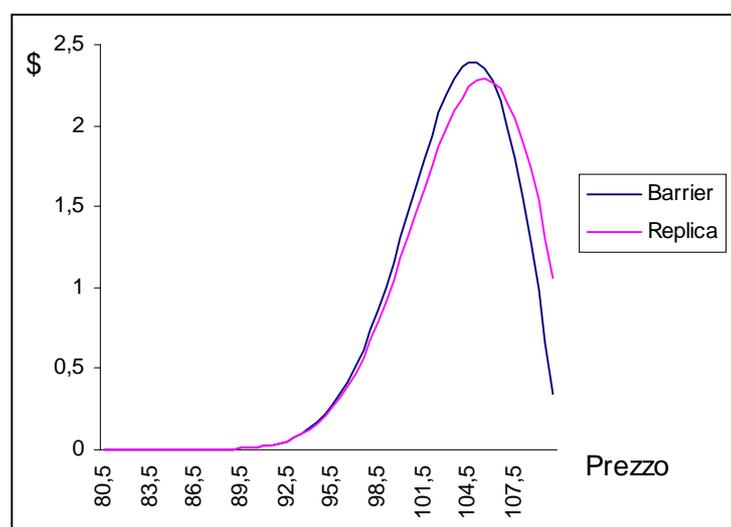
<sup>10</sup> Si veda appunto Thomas (1996: 122-123).

Come si ricava facilmente dal grafico la nostra replica si comporta in maniera soddisfacente su tutto il *range* di prezzo rappresentato, ed in particolare per prezzi vicini alla barriera (il precedente esempio di copertura statica era alquanto carente a riguardo: del resto non teneva in nessun conto il valore temporale che la *vanilla* possiede in corrispondenza della barriera).



**Figura 20** - Valore della *up and out call* e della replica (composta esclusivamente di *vanilla*)

Oltretutto tale risultato è stato ottenuto senza ricorrere all'utilizzo di strumenti potenzialmente poco liquidi quali sono le opzioni binarie. Naturalmente anche questo metodo non è del tutto esente da critiche: in particolare la qualità della replica decade con il passare del tempo. La figura 21, relativa alla medesima situazione rappresentata nella 20 ma per una vita residua ridotta ad un solo mese, mostra in maniera abbastanza evidente il peggioramento in questione.



**Figura 21** - Valore della *up and out call* e della replica (non modificata) ad un mese dalla scadenza

Ovviamente l'unico modo per recuperare l'efficienza della replica consiste nel ricalibrare *strike* e quantità delle *vanilla* vendute. Nella fattispecie dovremmo aumentare entrambi, portando lo *strike* a quota 106,8428\$ e la quantità ad un livello pari a 2,618. Chiaramente tali correttivi hanno un costo da non sottovalutare: è precisamente tale costo a consigliare

l'utilizzo di altre soluzioni che permettano di pervenire a delle *performance* più stabili nel tempo.

Precisamente in tale prospettiva è stato proposto l'impiego, in concomitanza con l'acquisto della solita *vanilla* sottostante, di *vertical spread*. Questi avrebbero il compito di replicare al meglio possibile la perdita di valore intrinseco che l'esotica registra in corrispondenza della barriera. Il numero di *spread* da vendere è dato dalla formula seguente:

$$N = 2 \frac{H - K}{K_2 - K_1},$$

dove  $H$  e  $K$  rappresentano rispettivamente barriera e *strike* della *up and out call*, mentre  $K_2$  e  $K_1$  sono gli *strike* delle *vanilla* componenti lo *spread*, i quali *strike* andranno ovviamente scelti, equidistanti dalla barriera (con  $K_2 > H$  e  $K_1 < H$ ), il più vicino possibile alla stessa (si veda in proposito il capitolo quinto e la sezione dedicata alla copertura statica delle *european digital*). Se il compito che ci aspettiamo venga assolto dagli *spread* è quello della replica del valore intrinseco della *knock-out* al momento della perforazione della barriera, il lettore si potrà chiedere il perché del fattore 2 riportato nella formula (accanto appunto a tale valore intrinseco): la ragione sta nel semplice fatto che lo *spread*, in corrispondenza della barriera (che viene a trovarsi a metà strada tra gli *strike* delle *vanilla*), vale sempre la metà circa del suo *payoff* massimo potenziale (la differenza tra gli *strike* delle *vanilla* componenti lo *spread*).

Chiaramente, nel caso le condizioni di mercato lo consentissero, ideale (ai fini della precisione della replica) sarebbe l'utilizzo di *european digital* dotate di *payoff* pari al doppio della differenza tra barriera e *strike* della *knock-out*, nonché di uno *strike* posto uguale alla barriera di quest'ultima. Anche in questo caso il "doppio" si giustifica con il fatto che, salvo a scadenza, il valore della *digital* risulta, in corrispondenza della barriera (e per un *drift* nullo), uguale alla metà (circa) del suo *payoff* potenziale (infatti, una volta che il prezzo del sottostante viene a trovarsi al livello della barriera, esso può, con la medesima probabilità, o quasi, se il *drift* è nullo, passare oltre o tornare semplicemente indietro). Utilizzando dunque un tale schema di replica (acquisto della *vanilla underlying* e vendita di una *european digital*) siamo nelle condizioni di ottenere il risultato che la figura 22 (relativa ad una vita residua di 2 mesi) mette in buon rilievo.

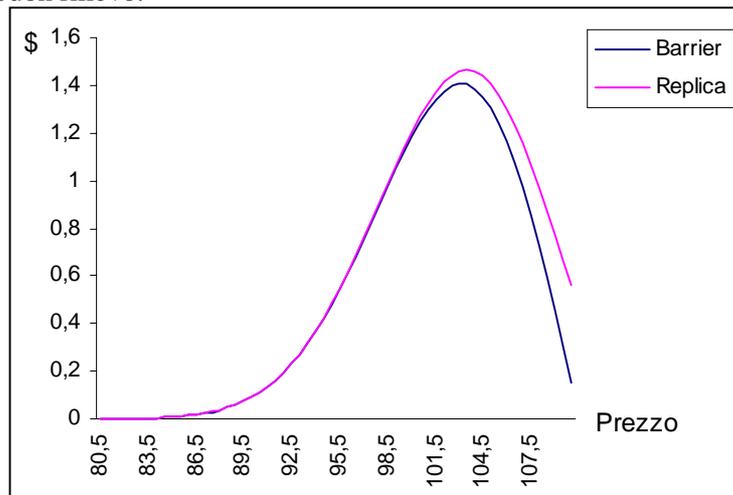


Figura 22 - Valore della *up and out call* e della replica (*vanilla – european digital*) per  $\tau=2$  mesi

Purtroppo l'andamento della replica, in special modo a ridosso della barriera, non può definirsi entusiasmante. La ragione di tale parziale insuccesso è da ricercarsi<sup>11</sup> nell'eventualità di un "eccessivo" valore temporale della *vanilla* sottostante in corrispondenza della barriera e dunque nell'eccessiva vicinanza dello *strike* alla barriera medesima. In sostanza, analogamente a quanto accadeva nel nostro primo tentativo di copertura statica, i *payoff* della *vanilla* collocati a destra della barriera sono troppo alti, in rapporto a quelli collocati a sinistra della stessa, per poter essere ignorati nel considerare il valore della perdita, al momento del *knocking-out*, esclusivamente di natura intrinseca. L'errore in questione (quale emerge dal grafico) si aggrava ovviamente all'avvicinarsi della barriera, quando cioè le densità di probabilità relative ai *payoff* di cui sopra raggiungono livelli tali da rendere questi ultimi assolutamente non trascurabili. Per ovviare a questo inconveniente occorre modificare la replica appena esaminata per il caso in cui lo *strike* sia appunto troppo vicino alla barriera. Ci si propone con tale modifica di "mimare" la perdita del valore temporale della *vanilla* registrabile al livello della barriera. La modifica non può consistere nell'aumento del *payoff* della *digital*, altrimenti, al mutare della vita residua, ci troveremmo nelle condizioni di dover ricalibrare l'entità di tale *payoff*. Si propone allora la vendita di un numero  $K/H$  di *vanilla call* con *strike* fissato a quota  $H^2/K$  \$. Il lettore ricorderà (dal capitolo settimo) come questa fosse la posizione da assumere per annullare il valore temporale di una *put* (dotata di *strike*  $K$ ) in corrispondenza di un livello dello *spot* pari ad  $H > K$ . In effetti, per la parità *put-call* (a tasso nullo), il valore temporale della *call* sottostante rilevabile in corrispondenza del livello  $H$  è uguale al medesimo valore registrabile dalla *put* sopra citata (con uguale *strike*) in tal punto. Si ricorda che la parità sopra menzionata (per  $r=0$ ) consiste nell'equazione che segue:

$$C + K = P + S,$$

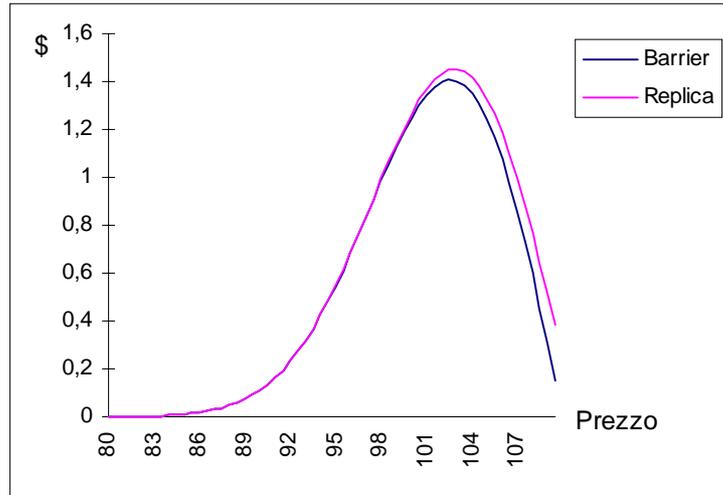
dove  $C$  e  $P$  rappresentano rispettivamente il valore di una *call* e quello di una *put* con uguale *strike*,  $K$  è il livello di quest'ultimo, mentre  $S$  è il prezzo *spot* del sottostante (che noi supponiamo di importo pari ad  $H$ ). Posto dunque  $S=H$  (dove  $H > K$ ) possiamo facilmente ottenere quanto segue:

$$C - (H - K) = P.$$

Il primo membro rappresenta il valore della *call* depurato del valore intrinseco, e dunque il suo valore temporale. Il secondo membro esprime anch'esso il valore temporale dell'opzione, poiché, per  $S=H > K$ , la *put* non possiede valore intrinseco, ma solo temporale. La nostra replica, modificata con la vendita di cui sopra, offre quindi un miglioramento sensibile rispetto alla situazione precedente (figura 23).

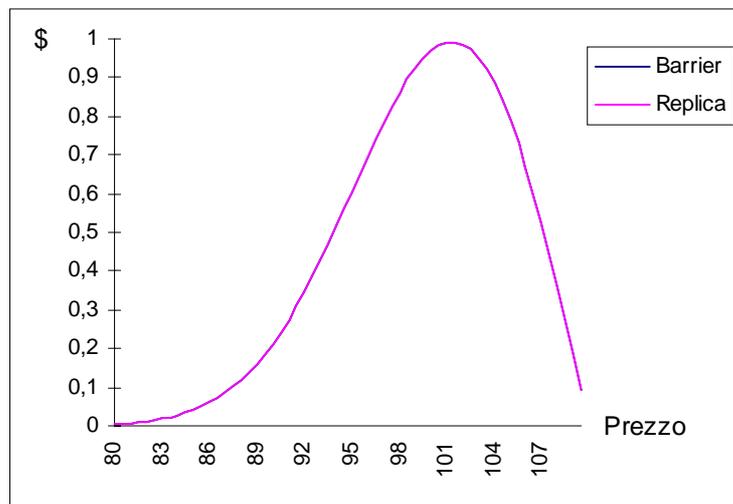
---

<sup>11</sup> Si veda Thomas (1996: 122-123).



**Figura 23** - Valore della *up and out call* e della replica (vanilla sottostante-digital-  $K/H$  call con strike  $H^2/K$ )

Qualora il lettore ritenesse marginale il miglioramento ottenuto, non ha che da sostituire la *digital* europea con la *digital* americana utilizzata nella prima replica esaminata nel presente paragrafo<sup>12</sup>. Ciò permette una replica assolutamente perfetta della *up and out call* per qualsiasi livello della vita residua (a patto ovviamente che il *drift* sia nullo). La figura 24 non manca di dimostrarlo agevolmente.



**Figura 24** - Valore della *barrier* e della replica (con *digital* americana) a tre mesi dalla scadenza

In effetti, molto meglio di quanto non faccia la *digital* europea<sup>13</sup>, l'*american binary* replica perfettamente la perdita del valore intrinseco della *barrier* al *knocking-out* dell'opzione,

<sup>12</sup> Avevamo del resto già accennato ad una modifica di quel metodo: la modifica consiste precisamente nella stessa utilizzata da Thomas, ovvero la vendita di un numero  $K/H$  di *vanilla call* con *strike* fissato a quota  $H^2/K$  \$).

<sup>13</sup> Specialmente per vite residue elevate, causa l'effetto legato alla lognormalità della distribuzione dei prezzi, il prezzo del sottostante, partendo dalla barriera-*strike*, ha più *chances* di ritrovarsi, a scadenza, sotto la barriera piuttosto che al di sopra della stessa: la conseguenza è che la *digital* europea, in corrispondenza di  $H$ , vale un poco

mentre la vendita delle *call* ( $K/H$  *call* con *strike*  $H^2/K$  \$) fa il resto, eliminando il residuo valore temporale.

A dire il vero, per ottenere il risultato sopra illustrato, non necessariamente si deve far ricorso alle *digital* americane in senso proprio. Thomas infatti ha ommesso di far notare come in realtà le due binarie europee di cui fa uso nella sua replica altro non rappresentano se non un modo approssimativo di replicare<sup>14</sup> una *digital* americana: in base a quanto visto nel sesto capitolo il lettore dovrebbe sapere che, per completare efficacemente la replica di una *digital* americana, non basta acquistare due binarie europee, ma occorre bensì l'acquisto ulteriore (nel caso di *up and in cash or nothing*) di una quantità  $B/H$  (dove  $B$  è il *payoff* della *digital* americana, ovvero, nel nostro caso, la differenza  $H-K$ ) di *vanilla call* con *strike*  $H$  (corrispondente alla barriera della *digital*, a sua volta uguale al "trigger" della *up and out call*); in effetti tale acquisto si rende necessario alla luce delle considerazioni sopra svolte riguardo alla lognormalità della distribuzione dei prezzi. Come già si è avuto modo di sottolineare la replica della *digital* (e con essa la replica della *knock-out*), strutturata nel modo sopra specificato, si dimostra priva di errori nel solo caso di *drift* nullo. In base a quanto spiegato possiamo così riassumere le diverse posizioni (in *vanilla* e non) componenti la replica di una *up and out call*:

$$\begin{aligned} \text{Up and out call}(K, H) &= \text{Call}(K) - \text{AmerDig}(H; H-K) - \frac{K}{H} \text{Call}\left(\frac{H^2}{K}\right) = \\ &= \text{Call}(K) - 2\text{EuroDig}(H; H-K) - \frac{H-K}{H} \text{Call}(H) - \frac{K}{H} \text{Call}\left(\frac{H^2}{K}\right); \end{aligned}$$

dove  $\text{Dig}(H; H-K)$  indica una *digital* con barriera  $H$  (*strike* nel caso dell'europea) e *payoff*  $B=H-K$ , mentre  $\text{Call}(K)$  rappresenta una *vanilla call* con *strike* fissato a quota  $K$ . Ovviamente è possibile sostituire le *digital* europee con opportuni *vertical spreads*. Posti  $K_1$  e  $K_2$  (con  $K_2 > K_1$  ed entrambi posti a cavallo della barriera, il più vicino possibile alla stessa) rispettivamente lo *strike* della *vanilla* in acquisto e quello della *vanilla* in vendita, possiamo determinare una replica (naturalmente meno precisa della precedente) composta esclusivamente di *vanilla*:

$$\begin{aligned} \text{Up and out call}(K, H) &= \\ &= \text{Call}(K) - \frac{2(H-K)}{K_2 - K_1} [\text{Call}(K_1) - \text{Call}(K_2)] - \frac{H-K}{H} \text{Call}(H) - \frac{K}{H} \text{Call}\left(\frac{H^2}{K}\right). \end{aligned}$$

Ovviamente, è il caso di ribadirlo ulteriormente, la replica si dimostra efficiente nel solo caso di *drift* nullo.

Per quanto concerne le altre *reverse barrier*, in base alla relazione di equivalenza tra *knock-out* e *knock-in*, da quanto detto deriva che, in assenza di *rebate*, la replica perfetta di una *up and in call* include l'acquisto di una *american digital* (o della replica costituita per mezzo di *european digital* o di *spreads*, in aggiunta alle opportune *vanilla*) con *trigger* coincidente con quello della *barrier option* e *payoff* pari ad  $(H-K)$ , nonché l'acquisto di  $K/H$  *vanilla call* con *strike* fissato a quota  $H^2/K$  \$.

Nel caso di una *down and out put*, in base a ragionamenti del tutto analoghi a quelli utilizzati per la *up and out call*, la replica è costituita dall'acquisto della *put* sottostante e dalla vendita

---

meno della metà del suo *payoff*, anche in presenza di un *drift* nullo, e questo spiega perché la replica valga sempre qualcosa più della *barrier*.

<sup>14</sup> Si veda in proposito Carr e Bowie (1995: 183-189).

di una *down and in american digital* (dotata di barriera coincidente con quella della *down and out put* e di *payoff* pari a  $K-H$ ), o sua replica, nonché da una posizione corta in  $K/H$  *vanilla put* con *strike* fissato a quota  $H^2/K$  \$. In base alla medesima relazione ricordata poc' anzi la replica di una *down and in put* sarà costituita da posizioni del tutto opposte a quelle della *knock-out* con in aggiunta l'esclusione della "vanilla sottostante" (il che significa acquisto della *digital*, o suo surrogato, e di  $K/H$  *vanilla put* con *strike* fissato a quota  $H^2/K$  \$).

Ad ogni modo esiste un elemento capace di semplificare notevolmente la copertura ad esempio di una *up and out call*: l'eventuale presenza di un *rebate*. Nel caso infatti sia contrattualmente prevista una tale *feature*, e l'importo del *rebate* corrisponda esattamente al valore intrinseco dell'opzione al momento del *knocking-out* (come del resto è naturale che sia), ecco che viene meno la necessità della vendita della *digital* americana: a questo punto, infatti, per coprire la *up and out call* saranno sufficienti l'acquisto della *vanilla* sottostante unitamente alla vendita delle *call* (nella misura e nei modi sopra specificati: rimane infatti da eliminare, anche in presenza di *rebate*, il valore temporale dell'opzione in corrispondenza della barriera); in sostanza disporremmo di modalità di copertura del tutto analoghe a quelle utilizzate per le *regular barrier*. Analogo discorso vale per le restanti *reverse barrier*: nel caso delle *knock-in* il *rebate* assumerebbe la forma di *No Touch digital* ma con risultati, ai fini della copertura dell'opzione, del tutto equiparabili, rendendo infatti superfluo l'utilizzo delle *digital*.

Per completare la nostra analisi può essere utile riportare un ultimo esempio di copertura statica (e relativa critica). Derman, Ergener e Kani (1995)<sup>15</sup>, sulla base di un modello binomiale di *pricing*, hanno infatti proposto, in aggiunta al solito acquisto della *vanilla* sottostante, l'utilizzo di un gran numero di *vanilla*, sia in vendita che in acquisto, con lo scopo di annullare il valore della posizione in corrispondenza della barriera e per diverse vite residue, corrispondenti ai diversi nodi presso i quali l'albero binomiale incontra appunto la barriera. A detta di Tompkins (1997)<sup>16</sup> tuttavia il difetto maggiore del metodo starebbe nel numero enorme di *vanilla* necessarie affinché la replica mimi fedelmente il profilo di andamento della *barrier*. Ovviamente il succitato autore propone a sua volta un metodo che, pur estremamente semplice, dovrebbe garantire risultati quantomeno preferibili a quelli ottenibili con un pericoloso *Delta hedging*. Il metodo consiste nell'acquisto della solita *vanilla* sottostante con *strike* identico a quello della *barrier* e nella vendita di un opportuno numero di *vanilla* con *strike* fissato in corrispondenza della barriera: il numero "opportuno" va determinato in maniera tale che, a metà della vita residua della *knock-out*, per un livello dello *spot* pari ad  $H$ , il valore della posizione si annulli completamente. In base alle simulazioni numeriche di Tompkins il metodo garantirebbe performance, se non esaltanti, comunque superiori a quelle raggiungibili dal *Delta hedging* (il risultato medio è migliore anche se la variabilità dello stesso rimane considerevole).

---

<sup>15</sup> Si veda appunto Derman, Ergener e Kani (1995).

<sup>16</sup> Si veda infatti Tompkins (1997: 26-27).

## Appendice Matematica

### La up and in call

Nella sezione appena conclusa abbiamo indicato il valore di una *up and in call* nella somma dei seguenti due integrali:

$$C_{ui} = e^{-rt} \int_{\ln(H/S)}^{+\infty} (Se^u - K) f(u) du + e^{-rt} \int_{\ln(K/S)}^{\ln(H/S)} (Se^u - K) g(u) du.$$

Tuttavia questioni di comodità di calcolo inducono a spezzare in due parti distinte il secondo integrale, ottenendo:

$$C_{ui} = e^{-rt} \int_{\ln(H/S)}^{+\infty} (Se^u - K) f(u) du + \left[ e^{-rt} \int_{-\infty}^{\ln(H/S)} (Se^u - K) g(u) du - e^{-rt} \int_{-\infty}^{\ln(K/S)} (Se^u - K) g(u) du \right].$$

Non è difficile riconoscere nell'integrale posto al di fuori delle parentesi quadre il primo degli integrali componenti il valore di una *down and out call*, con un unico appunto: l'estremo inferiore di integrazione presenta  $H$  al posto di  $K$ . È quindi sufficiente adattare ai nostri fini la soluzione già presentata in precedenza, sostituendo soltanto  $H$  a  $K$  nell'argomento delle funzioni cumulate. Dunque:

$$e^{-rt} \int_{\ln(H/S)}^{+\infty} (Se^u - K) f(u) du = S \cdot N\left(\frac{\ln(S/H) + rt + \sigma^2 t/2}{\sigma\sqrt{t}}\right) - e^{-rt} K \cdot N\left(\frac{\ln(S/H) + rt - \sigma^2 t/2}{\sigma\sqrt{t}}\right).$$

Per quanto riguarda il duplice contenuto delle parentesi quadre, abbiamo evidentemente a che fare, in ambedue i casi, con lo stesso integrale utilizzato per la valutazione delle *down and in call*, con l'intervallo di integrazione invertito in entrambi ma con  $H$  al posto di  $K$  nel primo dei due. Si può chiaramente ovviare al problema cambiando il segno dell'argomento delle funzioni cumulate e sostituendo  $H$  a  $K$  nelle cumulate del primo integrale. Quindi:

$$\begin{aligned} & e^{-rt} \int_{-\infty}^{\ln(H/S)} (Se^u - K) g(u) du = \\ & = \left(\frac{H}{S}\right)^{\frac{2a}{\sigma^2}} \left[ \left(\frac{H^2}{S}\right) N\left(-\frac{\ln(H/S) + at + \sigma^2 t}{\sigma\sqrt{t}}\right) - e^{-rt} K \cdot N\left(-\frac{\ln(H/S) + at}{\sigma\sqrt{t}}\right) \right]. \end{aligned}$$

Mentre:

$$\begin{aligned} & e^{-rt} \int_{-\infty}^{\ln(K/S)} (Se^u - K) g(u) du = \\ & = \left(\frac{H}{S}\right)^{\frac{2a}{\sigma^2}} \left[ \left(\frac{H^2}{S}\right) N\left(-\frac{\ln(H^2/SK) + at + \sigma^2 t}{\sigma\sqrt{t}}\right) - e^{-rt} K \cdot N\left(-\frac{\ln(H^2/SK) + at}{\sigma\sqrt{t}}\right) \right]. \end{aligned}$$

Mettendo insieme i tasselli ottenuti, abbiamo<sup>17</sup>:

$$C_{ui} = S \cdot N\left(\frac{\ln(S/H) + rt + \sigma^2 t/2}{\sigma\sqrt{t}}\right) - e^{-rt} K \cdot N\left(\frac{\ln(S/H) + rt - \sigma^2 t/2}{\sigma\sqrt{t}}\right) +$$

$$+\left(\frac{H}{S}\right)^{\frac{2a}{\sigma^2}} \left[ \left(\frac{H^2}{S}\right) N\left(-\frac{\ln(H/S) + at + \sigma^2 t}{\sigma\sqrt{t}}\right) - e^{-rt} K \cdot N\left(-\frac{\ln(H/S) + at}{\sigma\sqrt{t}}\right) \right] -$$

$$-\left(\frac{H}{S}\right)^{\frac{2a}{\sigma^2}} \left[ \left(\frac{H^2}{S}\right) N\left(-\frac{\ln(H^2/SK) + at + \sigma^2 t}{\sigma\sqrt{t}}\right) - e^{-rt} K \cdot N\left(-\frac{\ln(H^2/SK) + at}{\sigma\sqrt{t}}\right) \right].$$

### La up and out call

Il valore di una up and out call è dato dal seguente integrale:

$$C_{uo} = e^{-rt} \int_{\ln(K/S)}^{\ln(H/S)} (Se^u - K)(f(u) - g(u)) du.$$

Ai fini della soluzione matematica conviene tuttavia spezzare l'integrale prima in due, ed infine in quattro parti:

$$C_{uo} = e^{-rt} \int_{\ln(K/S)}^{\ln(H/S)} (Se^u - K)(f(u) - g(u)) du = e^{-rt} \int_{\ln(K/S)}^{\ln(H/S)} (Se^u - K)f(u) du - e^{-rt} \int_{\ln(K/S)}^{\ln(H/S)} (Se^u - K)g(u) du$$

Scomponendo ora ulteriormente le due parti ottenute, abbiamo:

$$e^{-rt} \int_{\ln(K/S)}^{\ln(H/S)} (Se^u - K)f(u) du = e^{-rt} \int_{\ln(K/S)}^{+\infty} (Se^u - K)f(u) du - e^{-rt} \int_{\ln(H/S)}^{+\infty} (Se^u - K)f(u) du ;$$

mentre

$$e^{-rt} \int_{\ln(K/S)}^{\ln(H/S)} (Se^u - K)g(u) du = e^{-rt} \int_{-\infty}^{\ln(H/S)} (Se^u - K)g(u) du - e^{-rt} \int_{-\infty}^{\ln(K/S)} (Se^u - K)g(u) du ;$$

e dunque

$$C_{uo} = e^{-rt} \int_{\ln(K/S)}^{+\infty} (Se^u - K)f(u) du - e^{-rt} \int_{\ln(H/S)}^{+\infty} (Se^u - K)f(u) du -$$

$$- e^{-rt} \int_{-\infty}^{\ln(H/S)} (Se^u - K)g(u) du + e^{-rt} \int_{-\infty}^{\ln(K/S)} (Se^u - K)g(u) du .$$

<sup>17</sup> Per la versione comprensiva dei dividendi (o del tasso sulla valuta merce) o per il caso in cui si faccia riferimento a prezzi forward, si vedano i prospetti riportati alla fine del paragrafo dedicato al pricing, nel presente capitolo.

Di questi quattro integrali costituenti il valore della *up and out call*, gli ultimi tre sono gli stessi identici che, con segno opposto, vanno a formare il valore della *up and in call*. Il primo integrale invece rappresenta semplicemente il valore di una *vanilla call* con *strike* identico a quello della *barrier*. Del resto, ricordando le relazioni tra *knock-in* e *knock-out* trattate nel settimo capitolo, non deve stupire l'equazione che, in base a quanto detto, viene chiaramente delineandosi nella forma seguente:

$$C_{uo} = \text{Vanilla call} - C_{ui}.$$

Tirando le somme di quanto finora sviluppato, il valore della *up and out call* è:

$$\begin{aligned} C_{uo} = & S \cdot N\left(\frac{\ln(S/K) + rt + \sigma^2 t/2}{\sigma\sqrt{t}}\right) - e^{-rt} K \cdot N\left(\frac{\ln(S/K) + rt - \sigma^2 t/2}{\sigma\sqrt{t}}\right) - \\ & - S \cdot N\left(\frac{\ln(S/H) + rt + \sigma^2 t/2}{\sigma\sqrt{t}}\right) + e^{-rt} K \cdot N\left(\frac{\ln(S/H) + rt - \sigma^2 t/2}{\sigma\sqrt{t}}\right) - \\ & - \left(\frac{H}{S}\right)^{\frac{2a}{\sigma^2}} \left[ \left(\frac{H^2}{S}\right) N\left(-\frac{\ln(H/S) + at + \sigma^2 t}{\sigma\sqrt{t}}\right) - e^{-rt} K \cdot N\left(-\frac{\ln(H/S) + at}{\sigma\sqrt{t}}\right) \right] + \\ & + \left(\frac{H}{S}\right)^{\frac{2a}{\sigma^2}} \left[ \left(\frac{H^2}{S}\right) N\left(-\frac{\ln(H^2/SK) + at + \sigma^2 t}{\sigma\sqrt{t}}\right) - e^{-rt} K \cdot N\left(-\frac{\ln(H^2/SK) + at}{\sigma\sqrt{t}}\right) \right] \end{aligned}$$

