Capitolo 5 - Opzioni *regular* barrier

Le barrier options, specificamente nella forma di knock-out regular call, sono comparse per la prima volta sul mercato OTC nel lontano 1967. Elementi decisivi per la diffusione di tali derivati sono stati lo sviluppo di una metodologia di pricing coerente ed il successo incontrato, alla fine degli anni ottanta, nel campo dei mercati valutari (in particolar modo in Giappone¹). Chiaramente a tale successo hanno contribuito le peculiari caratteristiche di queste opzioni, che, di fatto, si rivelano strumenti particolarmente efficaci nel fornire, ad un prezzo nettamente inferiore, alcune delle prestazioni (specie in certe condizioni), offerte dalle più semplici vanilla. Oltretutto questa tipologia di opzioni esotiche sembra fatta apposta per risultare gradita ai cosiddetti graficisti, cioè a quegli operatori che credono nei trend di mercato, e che magari ritengono determinati livelli del prezzo, se toccati, come particolarmente critici ai fini della direzione che il mercato dovrà poi assumere: ad esempio, se un operatore credesse in un consistente rialzo, ma ritenesse altresì che, nel caso in cui il prezzo scendesse al di sotto di un determinato livello critico, il mercato imboccherebbe una via del tutto diversa, potrebbe semplicemente acquistare una down and out call, con una barriera fissata in corrispondenza del livello critico; in tal modo l'esotica gli garantirebbe (come il lettore avrà modo di capire più avanti) gli stessi servigi della vanilla, ma a prezzo nettamente ridotto. In effetti tale è stato il successo delle opzioni barriera da farne, insieme alle binarie, praticamente il prodotto di gran lunga più popolare all'interno del mercato delle opzioni esotiche.

Si è già avuto modo in precedenza di accennare alla distinzione tra le opzioni di tipo *regular* (le opzioni barriera "normali") e quelle di tipo *reverse*; queste ultime si differenziano dalle prime per un profilo di valore instabile, che crea problemi in sede di copertura. Questa è anche la ragione fondamentale per cui, ricalcando lo schema di presentazione proposto in Taleb (1997: 312-375), si è deciso di anticipare nel presente capitolo la trattazione delle più semplici *regular*, per poter così consentire al lettore di affrontare preparato l'analisi delle ben più ostiche *reverse*.

Quanto al *pricing* delle opzioni in questione è bene chiarire come esso richieda, obbligatoriamente, la preliminare lettura dell'analogo paragrafo relativo alle binarie di tipo americano. Si è già infatti avuto modo di spiegare come tanto le *one touch digital* quanto le *barrier option* basano di fatto il proprio *pricing* (di tipo probabilistico) su una particolare distribuzione di probabilità condizionata, la cui derivazione è stata presentata all'inizio della sezione dedicata alle *digital* di tipo americano.

¹ Si veda Thomas (1996: 111-112).

5.1 Definizione e pa yoff

Da un punto di vista strettamente funzionale le opzioni barriera si dividono in due grandi categorie: le *knock-out* e le *knock-in* (o *kick-in*) *barrier option*. Le *knock-out* sono opzioni tradizionali dotate di un secondo *strike price*, denominato "barriera": nel caso in cui tale barriera venga "infranta" l'opzione si estingue automaticamente. Le *knock-in* al contrario sono contratti che offrono al detentore il possesso di una *vanilla* solo nel momento in cui la barriera (predefinita contrattualmente) dovesse essere raggiunta entro l'arco di vita del contratto. In questo paragrafo ci occuperemo delle *regular barrier option*, ossia di quel particolare tipo di opzioni barriera che si estinguono (*knock-out*) o vengono ad esistenza (*knock-in*) nell'intervallo di prezzo in cui l'opzione è *out of the money*, ovvero in presenza di un valore intrinseco nullo; le *regular* includono dunque: le *down and out call*, le *up and out put* (si estinguono *out of the money*), le *down and in call* e le *up and in put* ("nascono" *out of the money*). È il caso di ricordare come, affinché le opzioni in questione nascano o si estinguano effettivamente *out of the money*, lo *strike* deve risultare rispettivamente maggiore della barriera nel caso delle *call* e minore nel caso opposto (le *put*). I rispettivi *payoff* delle opzioni appena citate possono essere così rappresentati:

$$\begin{aligned} & \text{Down and out call:} & \begin{cases} \operatorname{Max}[0 \,,\, S_T - K] \text{ se per ogni } \tau \leq T \text{ risulta } S(\tau) > H \\ & 0 \qquad \text{ se per qualche } \tau \leq T \text{ risulta } S(\tau) \leq H \end{cases} \\ & Up \text{ and out put:} & \begin{cases} \operatorname{Max}[0 \,,\, K - S_T] \text{ se per ogni } \tau \leq T \text{ risulta } S(\tau) < H \\ & 0 \qquad \text{ se per qualche } \tau \leq T \text{ risulta } S(\tau) \geq H \end{cases} \\ & Down \text{ and in call:} & \begin{cases} \operatorname{Max}[0 \,,\, S_T - K] \text{ se per qualche } \tau \leq T \text{ risulta } S(\tau) \leq H \\ & 0 \qquad \text{ se per ogni } \tau \leq T \text{ risulta } S(\tau) > H \end{cases} \\ & Up \text{ and in puts:} & \begin{cases} \operatorname{Max}[0 \,,\, K - S_T] \text{ se per qualche } \tau \leq T \text{ risulta } S(\tau) \geq H \\ & 0 \qquad \text{ se per ogni } \tau \leq T \text{ risulta } S(\tau) \leq H \end{cases} \\ & 0 \qquad \text{ se per ogni } \tau \leq T \text{ risulta } S(\tau) \leq H \end{cases}$$

dove S_T rappresenta il prezzo *spot* del sottostante a scadenza, τ indica un momento determinato prima della scadenza, T è la scadenza, H è il livello di prezzo in corrispondenza del quale è fissata la barriera, mentre $S(\tau)$ rappresenta il prezzo del sottostante rilevabile nell'istante τ .

È il caso di ricordare come le opzioni barriera possano prevedere contrattualmente anche una sorta di premio di consolazione, detto *rebate*, per il caso in cui i movimenti del sottostante si rivelino del tutto sfavorevoli per il detentore: l'opzione *knock-out* pagherebbe quindi una somma *R* nel caso di perforamento della barriera, mentre l'opzione *knock-in*, al contrario, nel caso di mancato raggiungimento della stessa (poiché, evidentemente, non si può essere certi del mancato perforamento della barriera se non a scadenza, dunque solo allora il *rebate* verrà corrisposto).

5.2 Pricing delle regular barrier option

Abbiamo già accennato nell'introduzione all'anno di esordio delle opzioni barriera sul mercato americano: il 1967. Cox e Miller (1965) avevano però già trovato la funzione di densità (si veda il paragrafo precedente) sulla cui base era possibile una valutazione in termini probabilistici delle opzioni qui trattate. Occorrerà tuttavia aspettare gli anni settanta per la realizzazione, ad opera di Merton (1973), del primo modello di pricing delle barrier options: si trattava nella fattispecie di una valutazione delle down and out options basata sulla risoluzione di un'equazione differenziale stocastica opportunamente condizionata. Dopo il lavoro di Merton lo studio delle opzioni barriera latiterà dalla letteratura finanziaria per ben dieci anni: Bergman (1983) riprenderà in un certo senso il lavoro di Merton sviluppando un impianto di valutazione per le opzioni path-dependent. Due anni più tardi Cox e Rubinstein (1985) fornivano una formula sintetica per la valutazione delle down and out barrier. Finalmente nel 1991, in concomitanza con la pubblicazione dei brevi articoli di Hudson e di Benson, Rubinstein e Reiner (1991a) rendevano disponibile una esaustiva valutazione "alla Black e Scholes" degli otto tipi di opzioni standard a barriera esistenti. Più tardi, nel 1994, Boyle e Lau (1994) applicheranno con il medesimo scopo il meno elegante, ma pur sempre efficace, metodo binomiale. Negli anni seguenti la letteratura in materia ha conosciuto uno sviluppo enorme, senza peraltro innovazioni sostanziali rispetto alle opere prima citate.

In questo paragrafo offriremo una valutazione² in forma analitica dei quattro tipi di *regular barrier options* oggetto d'analisi del presente capitolo: per far questo utilizzeremo il metodo probabilistico ed in particolare una speciale funzione di densità probabilistica messa a punto, come più volte ribadito, da Cox e Miller nel 1965 e che il lettore dovrebbe ricordare dall'analisi condotta a riguardo in precedenza. Ad ogni modo si riporta qui di seguito la funzione rappresentante, per ogni livello di prezzo finale posto al di qua della barriera, la "probabilità" (più correttamente la densità di probabilità) con cui il prezzo del sottostante (=logaritmo del prezzo) vi possa arrivare senza mai passare per la barriera:

$$p(X,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \left\{ e^{-\frac{1}{2} \frac{(X-0-at)^2}{\sigma^2 t}} - e^{2ha/\sigma^2} e^{-\frac{1}{2} \frac{(X-2h-at)^2}{\sigma^2 t}} \right\},\,$$

dove X è il logaritmo del rapporto tra prezzo finale e prezzo iniziale, mentre $h = \ln(H/S)$ (è la versione logaritmica della barriera).

Di questa funzione di densità ci preme isolare in particolare il secondo addendo, ovvero la funzione che, per ogni livello di prezzo posto al di qua della barriera, ci dice la "probabilità" con cui il sottostante vi può arrivare *passando* per la barriera. Chiameremo tale funzione $g(X,t)^3$:

$$g(X,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{2ha/\sigma^2} e^{-\frac{1}{2}\frac{(X-2h-at)^2}{\sigma^2 t}}.$$

Allo scopo di meglio uniformarci alla comune simbologia adottata per le funzioni di densità sostituiremo X (vale a dire il logaritmo del rapporto tra prezzo finale rilevato al tempo t e

² Per un eventuale confronto dei risultati si veda Rubinstein (1991) (con le opportune correzioni) o in alternativa Zhang (1997: 218-240).

³ In osseguio a Rubinstein (1991).

prezzo iniziale) con la notazione u. Dopo questa breve operazione di maquillage la nostra funzione diventa (trasformando inoltre il tempo in un semplice parametro):

$$g(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{2ha/\sigma^2} e^{-\frac{1}{2} \frac{(u-2h-at)^2}{\sigma^2 t}},$$

dove, nel caso fosse necessario ricordarlo, $a = r - \sigma^2/2$.

A questo punto siamo in grado di procedere alla valutazione delle opzioni barriera.

La down and in call

La prima tipologia di cui offriremo qui una valutazione è la down and in call (con K>H e senza rebate).

Utilizzando l'approccio probabilistico dovremo cercare di assegnare (e dunque moltiplicare) ad ogni possibile payoff positivo la "probabilità" che esso stesso ha di verificarsi e quindi sommare tutti i prodotti così ottenuti. Trattandosi di una knock-in, condizione imprescindibile per l'ottenimento di un qualsiasi payoff positivo è chiaramente la preliminare perforazione della barriera; proprio questa è la ragione che porta all'utilizzo della g(u) all'interno del seguente integrale definito che, opportunamente attualizzato, ci restituisce il valore dell'opzione in questione:

$$C_{di} = e^{-rt} \int_{\ln(K/S)}^{+\infty} (Se^{u} - K)g(u)du,$$

dove S è il prezzo spot iniziale.

Ricordando come u altro non sia che il logaritmo naturale del rapporto tra prezzo finale a scadenza e prezzo iniziale, integrare in du da ln(K/S) ad infinito significa semplicemente integrare da un prezzo tout-court pari a K fino ad infinito.

In sostanza noi stiamo sommando nel continuo (e dunque integrando) ogni *payoff* positivo (Se^u è banalmente il prezzo finale espresso attraverso la variabile logaritmica) moltiplicato per la rispettiva probabilità che questo ha di verificarsi; probabilità questa condizionata al preliminare perforamento della barriera (infatti g(u) ci restituisce, per ogni livello di prezzo finale compreso nella zona *in the money*, la sola probabilità relativa ai "percorsi utili", ovvero quelli passanti per la barriera).

La risoluzione, passo per passo, dell'integrale sopra proposto è reperibile nell'apposita appendice matematica che conclude il presente capitolo. In questa sede ci limiteremo ad offrire la soluzione finale nella forma seguente, che consente il calcolo del premio della down and in call C_{di} :

$$C_{di} = \left(\frac{H}{S}\right)^{\frac{2a}{\sigma^2}} \left[\left(\frac{H^2}{S}\right) N \left(\frac{\ln(H^2/SK) + rt + \sigma^2 t/2}{\sigma\sqrt{t}}\right) - e^{-rt} K \cdot N \left(\frac{\ln(H^2/SK) + rt - \sigma^2 t/2}{\sigma\sqrt{t}}\right) \right]$$

È questa dunque la formula che permette una valutazione in forma chiusa delle *down and in call* (con K>H); osservando tuttavia meglio la soluzione proposta non è poi così difficile constatare quanto notevoli siano le analogie strutturali di tale formula con quella ben più celebre di Black e Scholes per la valutazione delle *vanilla*: in effetti l'espressione compresa all'interno delle parentesi quadre può essere tranquillamente interpretata come la formula appena citata con la semplice sostituzione di S con H^2/S . Di qui la forma compatta con cui è possibile esprimere la formula per la valutazione delle *down and in call*:

$$C_{di} = \left(\frac{H}{S}\right)^{\frac{2a}{\sigma^2}} C_{bs} \left(\frac{H^2}{S}, K\right),$$

dove $C_{bs}\left(\frac{H^2}{S},K\right)$ indica la classica formula di Black e Scholes (per le call) espressa come

funzione dell'espressione H^2/S , al posto del più tradizionale sottostante S, e dello *strike price* K.

II rebate della down and in call

La formula appena ottenuta non tiene tuttavia in considerazione l'eventualità della concessione di un *rebate* (chiaramente a scadenza) in caso di mancato perforamento della barriera. Nel caso appunto in cui tale eventualità sia sancita contrattualmente si rende evidentemente necessaria l'aggiunta alla nostra formula di una componente che offra una valutazione analitica di tale *feature*.

Per una stima del valore del rebate è sufficiente moltiplicare il valore attuale della cifra pattuita contrattualmente (=R in caso di mancato perforamento della barriera) per la probabilità che il contratto si estingua senza che il prezzo arrivi mai a toccare la barriera (ovvero la probabilità che il prezzo del sottostante finisca la propria corsa sopra la barriera diminuita della probabilità che il prezzo, pur finendo sopra la barriera, passi almeno una volta per la stessa). Nella simbologia matematica:

$$V_R(down \ and \ in \ call) = e^{-rt} R \int_{\ln(H/S)}^{+\infty} (f(u) - g(u)) du$$
,

dove f(u) è la consueta distribuzione normale non condizionata che, opportunamente integrata, restituisce la probabilità tout-court che il prezzo finale risulti superiore alla barriera. Sviluppando:

$$V_R(down\ and\ in\ call) = e^{-rt} R \left[\int_{\ln(H/S)}^{+\infty} f(u) du - \int_{\ln(H/S)}^{+\infty} g(u) du \right] =$$

-

⁴ Si yeda Zhang (1997: 218).

$$=e^{-rt}R\left[\int\limits_{\ln(H/S)}^{+\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u-at}{\sigma\sqrt{t}}\right)^{2}}du-\int\limits_{\ln(H/S)}^{+\infty}e^{\frac{2ah}{\sigma^{2}}}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u-2\ln(H/S)-at}{\sigma\sqrt{t}}\right)^{2}}du\right].$$

A questo punto si procede con le consuete sostituzioni: nella fattispecie sostituiremo nel primo integrale $x = \frac{u - at}{\sigma\sqrt{t}}$ (da cui $u = x\sigma\sqrt{t} + at$ e dunque $u' = \sigma\sqrt{t}$), mentre nel secondo più

utilmente
$$v = \frac{u - 2\ln(H/S) - at}{\sigma\sqrt{t}}$$
 (da cui $u = v\sigma\sqrt{t} + 2\ln(H/S) + at$ e quindi $u' = \sigma\sqrt{t}$).

Dunque, modificando al solito anche gli intervalli di integrazione, otteniamo:

$$V_{R} = e^{-rt} R \left[\int_{\frac{\ln(H/S) - at}{\sigma\sqrt{t}}}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{1}{2}x^{2}} \sigma\sqrt{t} \, dx - \left(\frac{H}{S}\right)^{\frac{2a}{\sigma^{2}}} \int_{\frac{\ln(H/S) - 2\ln(H/S) - at}{\sigma\sqrt{t}}}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{1}{2}v^{2}} \sigma\sqrt{t} \, dv \right] =$$

$$= e^{-rt} R \left[N \left(\frac{\ln(S/H) + at}{\sigma\sqrt{t}}\right) - \left(\frac{H}{S}\right)^{\frac{2a}{\sigma^{2}}} N \left(\frac{\ln(H/S) + at}{\sigma\sqrt{t}}\right) \right].$$

Coerentemente con quanto detto il prezzo di una *down and in call* con *rebate* (e *K>H*) sarà la somma delle due componenti individuate (valore dell'opzione *tout-court* più il valore del *rebate*):

$$C_{di}^* = C_{di} + V_R.$$

La up and in put e relativo rebate

Passiamo ora alla valutazione delle *up and in put* (con *K*<*H*). Chiaramente la struttura dell'opzione è del tutto speculare a quella delle *down and in call*; questo permette di sfruttare con poche modifiche le soluzioni cui siamo già pervenuti per le *call*. In effetti per ottenere la valutazione delle *up and in put* si tratta di risolvere il seguente integrale:

$$P_{ui} = e^{-rt} \int_{-\infty}^{\ln(K/S)} (K - Se^{u}) g(u) du.$$

L'intervallo di integrazione è evidentemente capovolto per la banale ragione che capovolta è l'area *in the money* dell'opzione *put* rispetto alla *call*. Idem dicasi per il contenuto delle prime parentesi all'interno dell'integrale. La modifica nell'intervallo di integrazione porterà evidentemente ad un cambiamento di segno nell'argomento delle funzioni cumulate, mentre lo scambio di segno nell'argomento dell'integrale provoca un analogo mutamento nella relazione algebrica che lega le funzioni cumulate nella formula finale. Infatti⁵:

⁵ Al solito, per una conferma, si veda Rubinstein (1991a: 28-35) o Zhang (1997: 218-240).

$$P_{ui} = \left(\frac{H}{S}\right)^{\frac{2a}{\sigma^2}} \left[e^{-rt} K \cdot N \left(\frac{\ln(SK/H^2) - rt + \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}} \right) - \left(\frac{H^2}{S}\right) N \left(\frac{\ln(SK/H^2) - rt - \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}} \right) \right]$$

Per quanto concerne il *rebate* eventualmente offerto dalla *up and in put* (in caso di mancato perforamento della barriera) la questione si ripropone in maniera del tutto analoga: si inverte l'intervallo di integrazione. Questo perché la "regione di prezzo" in cui il sottostante deve concludere la sua corsa (condizione necessaria ma non sufficiente) affinché ci sia la possibilità di pagamento del *rebate* non è più, come nel caso della *down barrier*, l'intervallo da H (in versione logaritmica) ad infinito, bensì l'intervallo compreso tra zero (che in versione logaritmica è $-\infty$) ed H (ancora in versione logaritmica: $\ln(H/S)$). Dunque:

$$V_R(up \ and \ in \ put) = e^{-rt} R \int_{-\infty}^{\ln(H/S)} (f(u) - g(u)) du =$$

$$= e^{-rt} R \left[N \left(-\frac{\ln(S/H) + at}{\sigma \sqrt{t}} \right) - \left(\frac{H}{S} \right)^{\frac{2a}{\sigma^2}} N \left(-\frac{\ln(H/S) + at}{\sigma \sqrt{t}} \right) \right].$$

Vale chiaramente anche per le *up and in put* con *rebate* lo stesso discorso valido per le *down call*: il valore complessivo è dato dalla somma del valore dell'opzione *tout-court* più il valore del *rebate* (modificato come sopra).

La down and out call

Prendiamo ora in esame la valutazione delle knock-out regular barrier option. L'analisi non presenta particolari difficoltà supplementari rispetto alle in-barrier: soltanto nel caso in cui sia prevista la presenza del rebate si rende necessario, come vedremo più avanti, l'utilizzo di una nuova funzione di densità h(t), già esaminata comunque nel capitolo precedente. La prima out-barrier di cui ci occuperemo in questa sede è la down and out call con K>H. Il valore dell'opzione appena citata ce lo offre la risoluzione del seguente integrale⁶:

$$C_{do} = e^{-rt} \int_{\ln(K/S)}^{+\infty} (Se^{u} - K)(f(u) - g(u))du.$$

In sostanza non si è fatto altro che moltiplicare ogni payoff utile per la probabilità che esso ha di verificarsi, probabilità questa condizionata però al mancato raggiungimento della barriera (non per niente abbiamo a che fare con una knock-out): di qui la sottrazione, effettuata attraverso la consueta g(u), dei "percorsi non utili", ovvero quelli che, prevedendo un'escursione sulla barriera, provocano l'estinzione anticipata dell'opzione. L'integrale può utilmente essere scisso in due parti:

⁶ Diversamente da Rubinstein (1991) si è preferito offrire al lettore un'impostazione del problema più compatta, semplicemente per la maggiore intuitività della stessa. La successiva scissione dell'integrale riporterà l'analisi nel solco tracciato dall'autore appena citato.

$$C_{do} = e^{-rt} \int_{\ln(K/S)}^{+\infty} \left(Se^{u} - K \right) f(u) du - e^{-rt} \int_{\ln(K/S)}^{+\infty} \left(Se^{u} - K \right) g(u) du.$$

Non è difficile ravvisare nel secondo integrale il valore della *down and in call*: questo permette di semplificare il nostro lavoro, rendendo possibile il riutilizzo dei risultati ottenuti nello studio della *knock-in*. Per quanto concerne poi il primo integrale il lettore esperto non mancherà di riconoscere in esso il valore di una semplice *vanilla call*. La formula per la valutazione delle *down and out call* è dunque la seguente:

$$\begin{split} C_{do} &= S \cdot N \Bigg(\frac{\ln(S/K) + rt + \sigma^2 t / 2}{\sigma \sqrt{t}} \Bigg) - e^{-rt} K \cdot N \Bigg(\frac{\ln(S/K) + rt - \sigma^2 t / 2}{\sigma \sqrt{t}} \Bigg) - \\ &- \bigg(\frac{H}{S} \bigg)^{\frac{2a}{\sigma^2}} \Bigg[\bigg(\frac{H^2}{S} \bigg) N \Bigg(\frac{\ln(H^2/SK) + rt + \sigma^2 t / 2}{\sigma \sqrt{t}} \Bigg) - e^{-rt} K \cdot N \Bigg(\frac{\ln(H^2/SK) + rt - \sigma^2 t / 2}{\sigma \sqrt{t}} \Bigg) \Bigg]. \end{split}$$

Questa formula, in base a quanto detto, può essere anche così riscritta:

$$C_{do}(K,H) = Vanilla\ call(K) - C_{di}(K,H),$$

da cui

$$C_{do}(K,H) + C_{di}(K,H) = Vanilla\ call(K)$$
.

Questa relazione verrà ripresa nel paragrafo dedicato alla copertura statica delle *barrier*. Ad ogni modo la ragion d'essere di tale equazione è banale: se si possiede contemporaneamente una *down and out call* ed una *down and in call* (con medesime caratteristiche) ci si garantisce necessariamente il possesso continuo di una *vanilla* con medesimo *strike*, poiché, qualora la *knock-out* dovesse estinguersi (a causa del perforamento della barriera), automaticamente la *knock-in* offrirebbe ciò che la *knock-out* ci ha tolto.

Il valore dell'eventuale *rebate* di una *down and out call* è lo stesso di una *down and in immediate american digital* (con identica barriera) che paghi, in caso di esercizio, una somma analoga a quella pagata dal *rebate*: si rimanda pertanto al paragrafo corrispondente.

La up and out put

Rimane da trattare a questo punto la sola tipologia delle *up and out put*. Come per le prime due opzioni esaminate in questo paragrafo, esiste una forma di simmetria tra le *down and out call* e le *up and out put*. In sostanza per ottenere una valutazione di queste ultime è sufficiente utilizzare le stesse soluzioni trovate per le prime con alcune semplici modifiche: trattandosi di *put* invece che di *call* occorrerà banalmente cambiare il segno che precede le funzioni cumulate (perché il *payoff* della *put* è l'esatto opposto di quello della *call*) nonché il segno interno alle stesse, essendosi invertito l'intervallo di integrazione. In termini matematici infatti il valore delle *up and out put* è dato dal seguente integrale:

$$P_{uo} = e^{-rt} \int_{-\infty}^{\ln(K/S)} (K - Se^u) (f(u) - g(u)) du.$$

Ne consegue, come poc'anzi spiegato, la soluzione seguente:

$$\begin{split} P_{uo} &= e^{-rt} K \cdot N \Biggl(-\frac{\ln(S/K) + rt - \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}} \Biggr) - S \cdot N \Biggl(-\frac{\ln(S/K) + rt + \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}} \Biggr) - \\ &- \Biggl(\frac{H}{S} \Biggr)^{\frac{2a}{\sigma^2}} \Biggl[e^{-rt} K \cdot N \Biggl(-\frac{\ln(H^2/SK) + rt - \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}} \Biggr) - \Biggl(\frac{H^2}{S} \Biggr) N \Biggl(-\frac{\ln(H^2/SK) + rt + \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}} \Biggr) \Biggr] \end{split}$$

Ovviamente vale anche in questo caso, *mutatis mutandis*, quanto messo in rilievo per le *down barrier*. Vale cioè la seguente relazione:

$$P_{uo}(K,H) = Vanilla put(K) - P_{ui}(K,H),$$

da cui

$$P_{uo}(K,H) + P_{ui}(K,H) = Vanilla put(K)$$
.

La logica che sta dietro a questa equazione è la medesima illustrata per le barrier call.

Si conclude qui questo paragrafo dedicato alla valutazione delle regular barrier option. Nel prossimo paragrafo, utilizzando grafici basati su questi stessi modelli di pricing, cercheremo di conoscere meglio le caratteristiche di "funzionamento" concreto di queste tipologie di opzioni. Prima tuttavia di dedicarci a tale studio è il caso di ricordare come le formule via via ottenute in questo paragrafo sono del tipo "alla Black e Scholes" classico: in altre parole non tengono conto degli eventuali dividendi che il sottostante paga al detentore. Esistono evidentemente varianti di tali formule che tengono conto dell'esistenza di dividendi (oppure del tasso sulla valuta merce: si pensi alle opzioni valutarie) nonché altre varianti ancora ideate per opzioni facenti riferimento non al prezzo spot (come fatto finora), bensì al prezzo forward del sottostante. Nelle pagine seguenti si riportano due tabelle contenenti, per ciascuno dei quattro tipi di opzioni qui trattate, rispettivamente la valutazione nel caso di sottostante pagante dividendi (o di sottostante valutario: vedi modello Garman-Kohlhagen (1983)) nonché quella derivante dal riferimento a prezzi forward del sottostante (alla Grabbe (1983)): nel primo caso d rappresenterà il tasso (idealmente continuo) con cui il sottostante paga i dividendi oppure, nel caso di opzione valutaria, il tasso senza rischio pagato sulla valuta merce (nel qual caso S verrebbe a rappresentare il costo, in valuta domestica, di una unità di valuta merce, ovvero il cambio spot), mentre nel secondo caso F sarebbe semplicemente il prezzo forward del sottostante, cui l'opzione fa riferimento. Oltretutto a verrà ad assumere significati diversi a seconda del modello: $a = r - d - \sigma^2/2$ nel modello di Merton (1973) (azioni paganti dividendi continui) o di Garman e Kohlhagen (1990) (opzioni valutarie), $a = -\sigma^2/2$ nel modello per prezzi forward (il che permette la semplificazione di $2a/\sigma^2$ in -1).

Tabella 1 - Pricing delle regular barrier in presenza di dividendi (o nel caso di opzioni valutarie)

	$\left(\frac{H}{S}\right)^{\frac{2a}{\sigma^2}} \left[e^{-dt} \left(\frac{H^2}{S}\right) N \left(\frac{\ln\left(H^2/SK\right) + rt - dt + \sigma^2 t/2}{\sigma\sqrt{t}}\right) - e^{-rt} K \cdot N \left(\frac{\ln\left(H^2/SK\right) + rt - dt - \sigma^2 t/2}{\sigma\sqrt{t}}\right) \right] \right]$ $\left(\frac{H}{S}\right)^{\frac{2a}{\sigma^2}} \left[e^{-rt} K \cdot N \left(\frac{\ln\left(SK/H^2\right) - rt - dt + \sigma^2 t/2}{\sigma\sqrt{t}}\right) - e^{-dt} \left(\frac{H^2}{S}\right) N \left(\frac{\ln\left(SK/H^2\right) - rt - dt - \sigma^2 t/2}{\sigma\sqrt{t}}\right) \right]$
Down and out call	$e^{-dt} S \cdot N \left(\frac{\ln(S/K) + rt - dt + \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}} \right) - e^{-rt} K \cdot N \left(\frac{\ln(S/K) + rt - dt - \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}} \right) - \left(\frac{H}{S} \right)^{\frac{2a}{\sigma^2}} \left[e^{-dt} \left(\frac{H^2}{S} \right) N \left(\frac{\ln(H^2/SK) + rt - dt + \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}} \right) - e^{-rt} K \cdot N \left(\frac{\ln(H^2/SK) + rt - dt - \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}} \right) \right]$
Up and out put	$e^{-rt} K \cdot N \left(-\frac{\ln(S/K) + rt - dt - \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}} \right) - e^{-dt} S \cdot N \left(-\frac{\ln(S/K) + rt - dt + \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}} \right) - \left(\frac{H}{S} \right)^{\frac{2a}{\sigma^2}} \left[e^{-rt} K \cdot N \left(-\frac{\ln(H^2/SK) + rt - dt - \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}} \right) - e^{-dt} \left(\frac{H^2}{S} \right) N \left(-\frac{\ln(H^2/SK) + rt - dt + \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}} \right) \right]$

Tabella 2 - Pricing delle regular barrier in caso di riferimento a prezzi forward

Down and in call	$\left(\frac{F}{H}\right)\left[\left(\frac{H^{2}}{F}\right)N\left(\frac{\ln\left(H^{2}/FK\right)+\sigma^{2}t/2}{\sigma\sqrt{t}}\right)-K\cdot N\left(\frac{\ln\left(H^{2}/FK\right)-\sigma^{2}t/2}{\sigma\sqrt{t}}\right)\right]$
Up and in put	$\left(\frac{F}{H}\right)\left[K \cdot N\left(\frac{\ln\left(FK/H^{2}\right) + \sigma^{2}t/2}{\sigma\sqrt{t}}\right) - \left(\frac{H^{2}}{F}\right)N\left(\frac{\ln\left(FK/H^{2}\right) - \sigma^{2}t/2}{\sigma\sqrt{t}}\right)\right]$
Down and out call	$F \cdot N\left(\frac{\ln(F/K) + \sigma^{2}t/2}{\sigma\sqrt{t}}\right) - K \cdot N\left(\frac{\ln(F/K) - \sigma^{2}t/2}{\sigma\sqrt{t}}\right) - \left(\frac{F}{H}\right)\left[\left(\frac{H^{2}}{F}\right)N\left(\frac{\ln(H^{2}/FK) + \sigma^{2}t/2}{\sigma\sqrt{t}}\right) - K \cdot N\left(\frac{\ln(H^{2}/FK) - \sigma^{2}t/2}{\sigma\sqrt{t}}\right)\right]$
Up and out put	$K \cdot N \left(-\frac{\ln(F/K) - \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}} \right) - F \cdot N \left(-\frac{\ln(F/K) + \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}} \right) - \left(\frac{F}{H} \right) \left[K \cdot N \left(-\frac{\ln(H^2/FK) - \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}} \right) - \left(\frac{H^2}{F} \right) N \left(-\frac{\ln(H^2/FK) + \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}} \right) \right]$

5.3 Valore e sensibilità delle regular barrier option

In questo paragrafo cominceremo a familiarizzare con il comportamento delle opzioni barriera, studiando in un primo momento l'andamento delle opzioni *knock-in* (in particolar modo quello delle *down and in calls*) per poi passare all'analisi della più antica varietà delle *knock-out*.

Le knock-in regular barrier option

Il grafico riportato in figura 1, rappresentante il valore di una down and in call in funzione del sottostante e della vita residua, è stato ottenuto assumendo uno strike K=105\$, una volatilità $\sigma=15,7\%$, un tasso senza rischio $r_f=5\%$ ed una barriera a quota H=100\$.

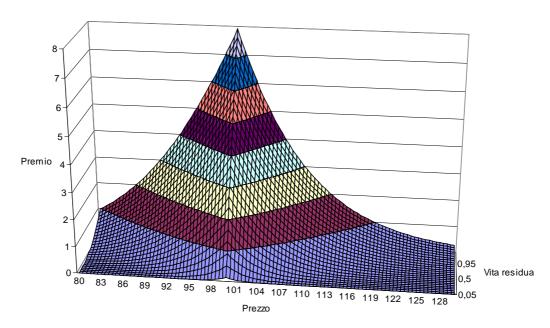


Figura 1 - Premio di una down and in call (K=105, H=100) in funzione del prezzo e della vita residua

È il caso di far immediatamente presente al lettore come l'opzione, al di sotto della barriera posta a quota 100\$, semplicemente cessi di essere una *barrier option* per diventare una *vanilla call* (ed è dunque una *vanilla* ad essere rappresentata nella regione sinistra del grafico): ciò è evidentemente frutto della struttura contrattuale. Per il resto le considerazioni che il grafico suggerisce sono molto semplici. In primo luogo l'opzione (partendo chiaramente da prezzi al di sopra della barriera) tende ad aumentare di valore man mano che il prezzo si avvicina alla barriera: ciò si spiega con il conseguente aumento della probabilità di perforamento di quest'ultima, evento che, come noto, porterebbe il detentore a beneficiare dell'agognato possesso della *vanilla* (senza il quale rimarrebbe, salvo *rebate*, assolutamente privo di qualsivoglia possibilità di *payoff* positivo).

A prescindere tuttavia dalle ragioni che portano l'opzione a presentare un tale profilo piuttosto che un altro, resta il fatto che esso finisce col risultare assai simile a quello di una *vanilla put*. Non è il caso qui di dilungarsi sul perché di una tale somiglianza: basti sapere che, in presenza di certe condizioni, è possibile addirittura replicare esattamente il valore della *knock-in* utilizzando una precisa quantità di *vanilla* (*put* nel caso presente, *call* nel caso di una *up and in put*) dotate di opportuni *strike price*: troveremo comunque modo di approfondire tale importante tematica nel prossimo paragrafo, dedicato alle modalità di copertura statica delle *regular barrier*.

Non deve inoltre stupire il fatto che il valore dell'opzione tenda (partendo da sopra la barriera), per prezzi molto vicini alla barriera, a coincidere così perfettamente (o quasi) con quello della *vanilla*: appena al di sopra di essa infatti il perforamento diviene evento praticamente certo, con la banale conseguenza di trasformare l'opzione in una *vanilla* con un certo "anticipo" (almeno nel valore). In effetti, in corrispondenza di una vita residua pari a nove mesi, passando da un prezzo (del sottostante) di 100,5\$ ad uno di 99,5\$ (ovvero infrangendo la barriera) il valore della posizione sale da 4,6\$ a 4,65\$ soltanto.

Il valore dell'opzione tende poi a scendere con il passare del tempo per un effetto ovvio di *time decay*; del resto il valore dell'opzione rappresentato nel grafico è interamente di tipo temporale, nel senso che dipende strettamente (ed esclusivamente) dalla probabilità di movimenti favorevoli del sottostante, movimenti questi che diventano meno probabili in presenza di una più bassa vita residua.

Passiamo ora all'analisi della funzione *Delta* (figura 2).

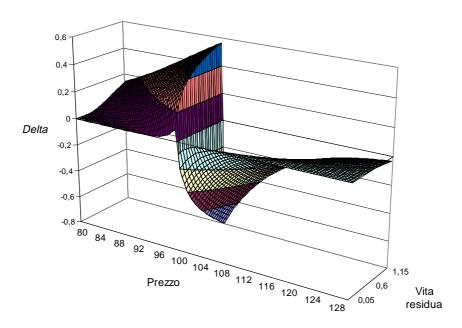


Figura 2 - Delta di una down and in call (K=105, H=100) in funzione del prezzo e della vita residua

Non è difficile rilevare la discontinuità che la funzione presenta in corrispondenza della barriera (a quota 100\$): è infatti in questo punto che l'opzione si trasforma nella *vanilla*, con conseguente stravolgimento della posizione che, da ribassista (in un primo momento), diventa improvvisamente rialzista (la *vanilla* è una *call*). Del resto basti pensare che, in presenza di una vita residua di nove mesi, passando da un prezzo (del sottostante) di 100,5\$ ad uno di 99,5\$ il *Delta* della posizione passa da –0,6 a 0,5 (quasi l'opposto). Non c'è bisogno di sottolineare come una tale discontinuità nella funzione *Delta* renda alquanto disagevole

l'eventuale copertura dinamica dell'opzione (ovvero tramite posizioni nel sottostante continuamente ricalibrate): giocherebbe infatti a sfavore dell'hedger il solito importante fenomeno dello slippage⁷, ma anche una indeterminatezza della copertura in prossimità della barriera (che potrebbe definirsi un effetto Gamma improprio, di segno opposto al Gamma tradizionale, dovuto al drastico aumento del Delta in seguito alla trasformazione dell'opzione), imprecisione questa che svolgerebbe un ruolo essenzialmente sfavorevole per il detentore (e favorevole per l'emittente, il quale vedrebbe smussato il tradizionale effetto Gamma a lui sfavorevole). Il Delta tende inoltre a calare con il passare del tempo: ciò è dovuto, sia sopra che sotto la barriera (la vanilla è out of the money), ad un generale calo delle probabilità relative a movimenti significativamente favorevoli del prezzo.

Il lettore particolarmente attento avrà inoltre notato come il *Delta* dell'opzione, per prezzi posti al di sopra della barriera, raggiunga valori superiori (in valore assoluto) a quelli raggiungibili per prezzi inferiori alla stessa: ciò si spiega *soprattutto* (ma non solo) con *l'effetto drift* cui più volte abbiamo fatto cenno nelle nostre considerazioni.

In sostanza la tendenza del prezzo a salire (in media: è il drift positivo) fa sì che il valore dell'opzione, anche in prossimità della barriera (nella fattispecie appena al di sopra), sia sempre suscettibile di sensibili aumenti: questo perché il drift positivo abbassa la probabilità di perforamento della barriera e la rende conseguentemente (e con essa chiaramente il valore dell'opzione) più sensibile a movimenti favorevoli del sottostante. Per una conferma numerica di quanto detto è sufficiente far notare come, nel caso di un'opzione con nove mesi di vita residua ed in presenza di un prezzo del sottostante appena al di sopra della barriera, per un tasso senza rischio che passa dal solito 5% ad un più sostanzioso 10%, il Delta dell'opzione sale (in valore assoluto) da -0,6 circa ad oltre -1 (ovvero quasi il doppio). In presenza quindi di un tasso nullo i Delta dell'opzione sui due "versanti" della barriera tendono a coincidere (sempre in valore assoluto), a patto però che la vita residua risulti sufficientemente bassa; bisogna infatti tenere ben presente che le differenti caratteristiche strutturali dell'opzione sui due lati della barriera (vanilla al di sotto di questa e praticamente digital al di sopra della stessa) possono essere ignorate solo quando una bassa vita residua rendesse la vanilla, data la difficoltà probabilistica per il prezzo (del sottostante) di raggiungere valori molto elevati, sufficientemente comparabile ad una digital (nel senso che i pavoff raggiungibili hanno scarsa variabilità).

Per quanto concerne la funzione *Gamma*, essa risulta, abbastanza prevedibilmente, sempre positiva per qualsiasi valore del prezzo o della vita residua. A riprova di tale affermazione si osservi la figura 3. Chiaramente la funzione non è definita in corrispondenza della barriera, dove del tutto arbitrariamente abbiamo posto la funzione uguale a zero. Ad ogni modo, qualora ce ne fosse ancora bisogno, il grafico ribadisce la "pericolosità", sotto il profilo del *Delta hedging*, della zona di prezzo a ridosso della barriera: un *Gamma* elevato implica sempre, in condizioni di mercato e di *hedging* non ideali (leggasi presenza di *trend* di prezzo e aggiustamento non continuo della posizione), la presenza dell'importante rischio *Gamma* corrispondente.

Va tuttavia aggiunto come, nel nostro caso, la derivata seconda del premio rispetto al prezzo dell'*underlying* non sembra raggiungere livelli particolarmente allarmanti nemmeno a ridosso della barriera (anzi addirittura inferiori a quelli riscontrabili in una *vanilla* in corrispondenza dello *strike*, anche se, è bene ricordarlo, il *Gamma* della *barrier* si mantiene su livelli più che discreti su tutto l'arco di vita dell'opzione, ovvero anche per basse vite residue): questo ci porta a ritenere abbastanza praticabile la strada della copertura tramite sottostante (è di fatto la più utilizzata), per quanto ciò non implichi necessariamente che essa sia poi la via migliore da seguire (si pensi oltretutto all'effetto *Gamma* "improprio" prodotto dalla discontinuità presso la barriera, effetto questo ignoto per le *vanilla*).

-

⁷ Si veda in proposito la parte dedicata alla copertura delle *american digital*.

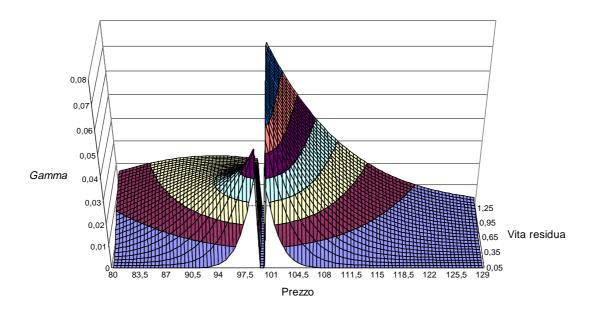


Figura 3 - Gamma di una down and in call (K=105, H=100) in funzione del prezzo e della vita residua

Esaminiamo ora la funzione *Vega* della medesima opzione. Il grafico riportato in figura 4 presenta evidentemente una schiacciante somiglianza con il *Vega* di una *vanilla*.

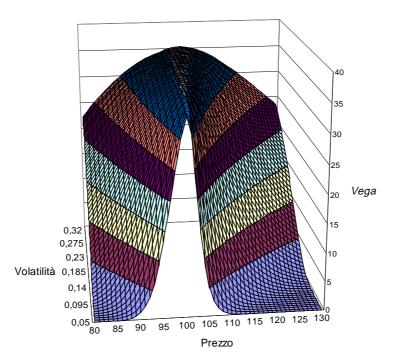


Figura 4 - Vega di una down and in call (K=105, H=100) in funzione del prezzo e della volatilità di partenza

Non è chiaramente il caso di spiegare perché la porzione di grafico posta a sinistra della barriera presenti una tale somiglianza; più interessante è invece cercare di giustificare la conformazione del grafico a destra della stessa. Il *Vega* tende a crescere man mano che il

prezzo si avvicina alla barriera: la ragione di ciò consiste semplicemente nel fatto che, tanto più prossimo risulta il prezzo al traguardo (la barriera), tanto più determinante diventa l'aiuto rappresentato da un incremento nella volatilità (anche se, per volatilità di partenza piuttosto alte e prezzi a ridosso della barriera, la probabilità di knocking-in raggiunge livelli tanto alti da risultare poco incrementabili, con la conseguenza che il Vega tende a decrescere già a partire da prezzi situati un poco sopra la barriera); d'altra parte, per prezzi molto lontani dalla barriera, la probabilità di perforamento della stessa diventa tanto bassa da risultare poco sensibile a moderati incrementi della volatilità. Quanto appena detto risulta tanto più vero quanto minore è la volatilità di partenza, per la semplice ragione che una bassa volatilità riduce la probabilità di perforamento in maniera più decisiva nelle regioni di prezzo lontane dalla barriera che in quelle vicine. Ecco spiegato perché il grafico debba, al diminuire della volatilità di partenza, sgonfiarsi molto più rapidamente per prezzi elevati che per prezzi vicini alla barriera. Volendo portare un esempio numerico, basti pensare che, in presenza di una volatilità del 20% e passando da uno spot di 130\$ ad uno di 101\$, il Vega sale da 8 a 35 (oltre quattro volte tanto). Quanto detto finora vale anche per il caso in cui si ragioni in termini di vita residua anziché in termini di volatilità.

L'altra *regular knock-in* qui trattata è rappresentata dalle *up and in put*. Di fatto la loro struttura, come del resto si è avuto modo di constatare nel paragrafo dedicato al *pricing* di queste *barriers*, può definirsi del tutto speculare a quella delle appena esaminate *down and in call*. Esiste tuttavia una variabile che, non rispettando questa simmetria strutturale, determina qualche lieve differenza comportamentale tra le due *knock-in*: tale variabile è evidentemente il *drift*, il quale non può non rimanere il medesimo per ambedue le esotiche (mentre per mantenere la simmetria avrebbe dovuto modificarsi nel suo opposto: ad esempio da 5% a –5%). Il grafico riportato in figura 5 è relativo all'andamento del premio della *up and in put*:

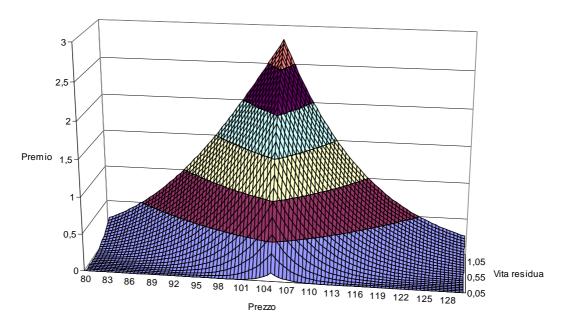


Figura 5 - Premio di una up and in put (K=100, H=105) in funzione del prezzo e della vita residua

La somiglianza (in termini speculari) del grafico con la figura 1 relativa al premio della *down* and in call è schiacciante. Tuttavia il drift, rimasto invariato, comporta leggere diversità in termini di pendenza: infatti, mentre il Delta della down and in call (al di sopra di H) era, in termini assoluti, superiore a quello della vanilla al di là della barriera, in questo caso avviene l'esatto opposto (il drift in effetti aumenta il Delta della vanilla put e diminuisce quello della

barrier). Il drift è inoltre responsabile di un'altra particolarità: portando all'eccesso la probabilità di knocking-in a ridosso della barriera, fa sì che il Delta, al diminuire della vita residua, tenda, a tratti (proprio a ridosso della barriera), ad aumentare lievemente (diversamente dalla call). Questo fenomeno si spiega con la diminuzione della probabilità di perforamento della barriera che il calo di vita residua porta con sé: tale diminuzione, data l'entità della probabilità di partenza, finisce dunque con l'essere più importante, ai fini del comportamento del Delta nel tempo, rispetto al calo di valore della vanilla sottostante (che tenderebbe a far calare la pendenza). Per il resto le due opzioni sono (specularmente) identiche. Per fini di completezza si riportano comunque i grafici relativi al Delta e al Gamma della up and in put (figura 6 e 7).

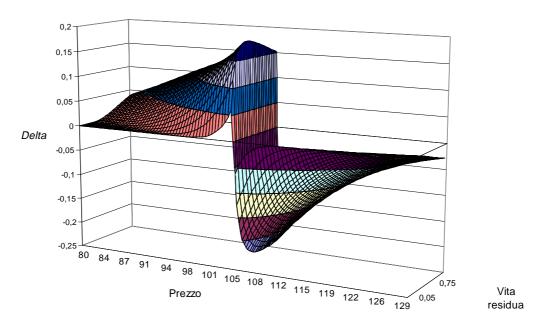


Figura 6 - Delta di una up and in put (K=100, H=105) in funzione del prezzo e della vita residua

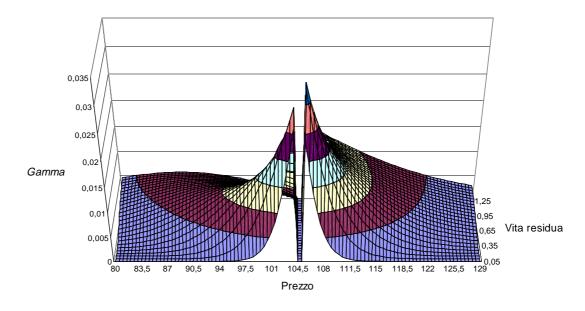


Figura 7 - Gamma di una up and in put (K=100, H=105) in funzione del prezzo e della vita residua

Le knock-out regular barrier options

Passando alle *knock-out option* si esamina, prima di tutto, l'andamento del valore di una *down* and out call in relazione al variare del prezzo e della vita residua (figura 8).

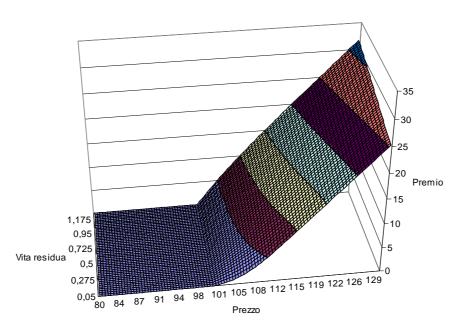


Figura 8 - Premio di una down and out call (K=105, H=100) in funzione del prezzo e della vita residua

Il grafico è stato ottenuto ipotizzando uno *strike* di 105\$, una barriera fissata a quota 100\$, una volatilità del 15,7% ed un tasso senza rischio del 5%. A scanso di equivoci, il grafico, al di qua di quota 100\$, semplicemente cessa di essere significativo: l'opzione non esiste al di sotto della barriera e la scelta di assegnarle valore zero (quale emerge dal grafico) è del tutto ovvia. Come lecito aspettarsi l'opzione aumenta di valore al salire del prezzo sottostante. Tale crescita (nel valore dell'opzione) non è dovuta solamente all'aumento del valore intrinseco che si verifica con l'aumento del prezzo, bensì trova una spinta ulteriore nella diminuzione della probabilità di *knocking-out* che l'aumento stesso del prezzo inevitabilmente produce, allontanando il sottostante dalla zona, per così dire, "critica".

Del resto, in base alla relazione $C_{do} + C_{di} = Vanilla\ Call\$ verificata nel precedente paragrafo di pricing, il valore di una C_{do} sarebbe costituito da una vanilla call con il concorso (algebricamente negativo) di una "specie di put" (la C_{di}): ciò aiuta a spiegare la rapida diminuzione di valore registrabile a ridosso della barriera (la "put" infatti aumenta di valore al calare del prezzo). Ad ogni modo la conformazione della funzione Delta catturata in figura 9 può aiutare a verificare quanto detto. Coerentemente con le considerazioni appena svolte il Delta dell'opzione, almeno in presenza di un'elevata vita residua, si rivela nettamente superiore alla corrispondente greca di una vanilla: per una verifica è sufficiente infatti constatare come esso (il Delta della barrier) risulti, a tratti (non casualmente per una vita residua molto elevata), addirittura superiore ad uno (nella fattispecie oltre 1,1 a nove mesi dalla scadenza e per prezzi collocati a ridosso della barriera). Ciò è dovuto, come già fatto

notare, all'aumento di valore indotto nell'opzione dalla diminuzione della probabilità di perforamento della barriera che un aumento del prezzo porta inevitabilmente con sé. Chiaramente questa componente probabilistica (componente questa che si aggiunge a quella del valore intrinseco, o più propriamente *vanilla*, nel determinare l'aumento di valore dell'opzione che segue ad una crescita del prezzo del sottostante) tende a risultare sempre meno significativa man mano che ci si allontana dalla barriera, per la banale ragione che la diminuzione di probabilità di cui sopra diventa, al crescere del prezzo, quantitativamente sempre meno consistente: la conseguenza è evidentemente, per prezzi sufficientemente alti, una netta prevalenza della componente *vanilla* su quella che abbiamo genericamente definito componente probabilistica ma che più significativamente ancora potremmo battezzare componente "barriera".

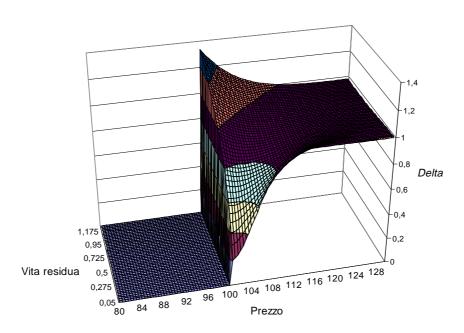


Figura 9 - Delta di una down and out call (K=105, H=100) in funzione del prezzo e della vita residua

La prevalenza su quest'ultima della componente più tradizionale porta il Delta dell'opzione, al crescere del prezzo, a convergere verso il valore unitario, prima da sopra e poi, quando la componente barriera è del tutto esaurita, da sotto (il tradizionale valore temporale della vanilla impedisce infatti al Delta di fermarsi, nella sua discesa, a quota uno). Resta da dire che la componente barriera è tanto più significativa quanto maggiore è la vita residua dell'opzione, per la semplice ragione che, quanto più tempo manca alla scadenza dell'opzione, tanto maggiore ne emerge la probabilità di perforamento della barriera. Quanto più alta si dimostra quest'ultima, tanto più condizionato ne risulta l'andamento del valore dell'opzione e quindi, in ultima analisi, tanto maggiore si manifesta l'influenza della componente barriera. A dimostrazione della validità di queste intuizioni di massima, il grafico del Delta tende, al diminuire drastico della vita residua, a ricalcare sempre più l'andamento del Delta di una vanilla: è la dimostrazione lampante della netta prevalenza della componente "vanilla" su quella "barriera" per bassi valori della vita residua. Il Gamma dell'opzione non può naturalmente non risultare condizionato dalle questioni appena trattate (si veda la figura 10). Come ampiamente prevedibile, per una vita residua sufficientemente elevata, la prevalenza della componente barriera (prevalenza che sfuma via via all'aumentare del prezzo) porta, nella corrispondente zona del grafico, ad un Gamma per lo più negativo, mentre, avvicinandoci alla scadenza, la schiacciante controffensiva della componente vanilla rende l'andamento della funzione Gamma del tutto analogo a quello della controparte tradizionale (il Gamma della

vanilla). Volendo offrire un esempio numerico, basti pensare che, passando, per uno spot di 102\$, da una vita residua di 1 anno ad una di 1 mese, il *Gamma* passa da un determinato valore negativo (-0,04) al suo esatto opposto algebrico (0,04 e oltre).

Per completare l'analisi delle *down and out calls* resta da esaminare soltanto l'importante funzione *Vega*.

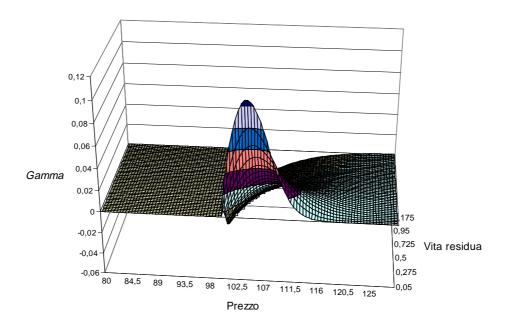


Figura 10 - *Gamma* di una *down and out call* (K=105, H=100) in funzione del prezzo e della vita residua

A ennesima dimostrazione della natura dicotomica che l'opzione presenta in corrispondenza di diverse vite residue (il derivato presenta infatti una propria originale natura fintantoché la vita residua si mantiene elevata, per poi trasformarsi quasi del tutto in una *vanilla*) si riportano i due grafici relativi al *Vega* di una medesima opzione rispettivamente ad 1 anno (il primo) e a 3 mesi (il secondo) dalla scadenza.

Si osservi quindi il primo grafico, relativo al Vega dell'opzione dotata ancora di un'elevata vita residua (figura 11). Non è difficile rilevare come l'opzione presenti, in certe zone del grafico ed in particolar modo a ridosso della barriera, accanto al familiare Vega positivo anche un non troppo sconcertante Vega negativo. La spiegazione di tale fenomeno è infatti estremamente semplice: a ridosso della barriera (ed in presenza di un'elevata vita residua che faccia da amplificatore) un aumento della volatilità del sottostante incrementa potentemente le probabilità di knocking-out dell'opzione e quindi, in sostanza, la possibilità di incappare nelle relative inevitabili conseguenze negative per il detentore. Chiaramente il fenomeno (del Vega negativo) risulterà più circoscritto in presenza di una bassa volatilità di partenza, poiché questa, abbassando notevolmente la probabilità di knocking-out, limita l'influenza della componente barriera nella struttura dell'opzione. Tuttavia, anche in presenza di una bassa volatilità di partenza, il Vega raggiunge comunque, per prezzi appena al di sopra della barriera, livelli negativi ragguardevoli (sotto -4,6): anzi si può ben dire che il Vega negativo è sì più facilmente rintracciabile per un'alta volatilità di partenza (lo si trova in una più estesa "zona di prezzo"), ma raggiunge i valori massimi (in termini assoluti) per basse volatilità. In sostanza per elevate volatilità la prevalenza della componente barriera porta a Vega quasi ovunque negativi, ma la stessa alta volatilità rende troppo elevata la probabilità di perforamento, al

punto da renderla non troppo sensibile ad ulteriori aumenti della volatilità stessa (la conseguenza è un *Vega* "non troppo negativo"); l'esatto opposto succede per basse volatilità di partenza. A conferma di quanto detto si consideri che, per una volatilità del 33%, il *Vega* si mantiene negativo per qualsiasi livello di prezzo compreso tra 101 e 120\$ senza però mai scendere sotto -1,35; al contrario, per una volatilità del 10%, il *Vega* risulta negativo nel solo esiguo *range* di prezzo compreso tra 101 e 103\$, raggiungendo tuttavia livelli (negativi) ben più sostanziosi, fino ad oltre -3,3.

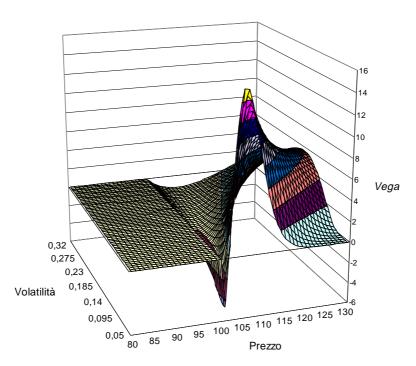


Figura 11 - Vega di una down and out call (K=105, H=100) in presenza di una vita residua pari ad 1 anno

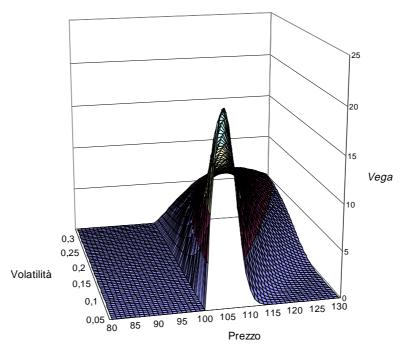


Figura 12 - Vega di una down and out call (K=105, H=100) a tre mesi dalla scadenza

Si è già avuto modo di spiegare come, per una bassa vita residua, la componente barriera debba cedere nettamente il passo alla più tradizionale componente *vanilla*. Ciò è facilmente riscontrabile nel grafico riportato in figura 12 (relativo al medesimo *Vega*, ma per una vita residua di soli tre mesi): non a caso infatti la struttura ricorda, molto più di quanto non faccia il primo grafico, il *Vega* di una *vanilla*. Le differenze ad ogni modo non possono certo mancare: specialmente per alte volatilità di partenza la componente barriera torna a far capolino; la bassa vita residua impedisce a tale componente di prendere il sopravvento e di sfociare in un *Vega* negativo ma, ciononostante, non può impedirle di abbassare notevolmente le dimensioni del *Vega* positivo.

Chiaramente tale riduzione del *Vega* ha luogo, oltre che per alte volatilità, a ridosso della barriera, dove, come del resto abbiamo ampiamente avuto modo di accertare, la componente barriera è giocoforza più significativa.

L'altra *knock-out* di cui dobbiamo occuparci in questa sede è rappresentata dalle *up and out put*. Come nel caso delle *knock-in*, la *put* presenta una struttura del tutto simmetrica a quella della *call*: ciò tuttavia non le impedisce di manifestare anche caratteristiche del tutto originali. Questa opzione presenta infatti, a differenza della controparte *down and out call*, un *time decay* a tratti negativo. In effetti, per prezzi abbastanza lontani dalla barriera, il valore dell'opzione sale al passare del tempo. Volendo offrire qualche cifra, si consideri che, per uno spot pari a 85\$ (in questo esempio e nel grafico riportato nella pagina seguente lo *strike* dell'opzione è stato fissato a quota 100\$, la barriera a 105\$; le condizioni restanti sono le medesime relative alle opzioni precedenti), l'opzione passa dagli 11,7\$ di valore per un anno di vita residua ai 13,8\$ riscontrabili a soli tre mesi dalla scadenza.

La figura 13 offre una prova visiva (si immagini la sezione del grafico per S=80\$) di quanto detto.

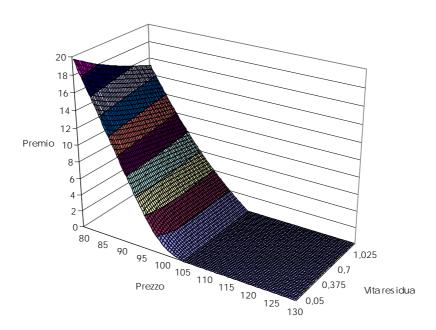


Figura 13 - Premio di una up and out put (K=100, H=105) in funzione del prezzo e della vita residua

La ragione di tale anomalo *time decay* è da attribuirsi interamente alla combinazione tra *drift* positivo (che questa volta spinge il sottostante verso la barriera) e componente barriera: il *drift* infatti mantiene a livelli significativi la probabilità di perforamento della barriera anche per prezzi molto lontani dalla stessa, mentre la riduzione della medesima probabilità ad opera del

semplice passaggio del tempo fa il resto. Paradossalmente tale fenomeno non ha luogo per prezzi troppo vicini alla barriera: la ragione di ciò è da ricercarsi nel bassissimo valore dell'opzione per tali prezzi e quindi in una situazione in cui quasi ogni movimento di un certo rilievo del sottostante finisce con l'essere ampiamente auspicabile (del resto solo un forte *shock* aleatorio, ovviamente al ribasso, può vincere il *drift* che trascina verso la barriera).

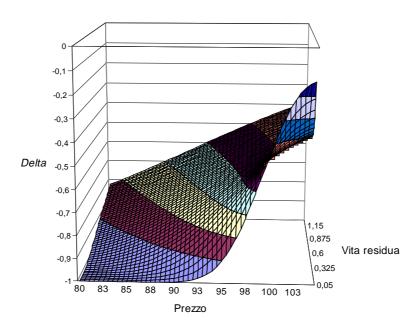


Figura 14 - Delta di una up and out put (H=105\$) in funzione del prezzo e della vita residua

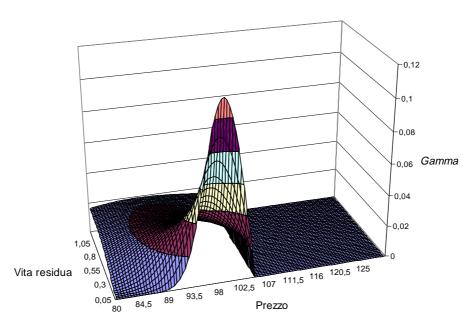
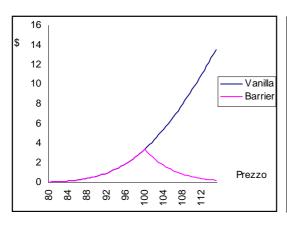


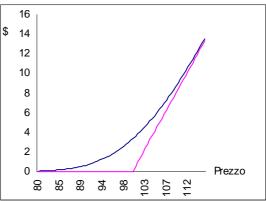
Figura 15 - Gamma di una up and out put (H=105) in funzione del prezzo e della vita residua

Osservando più attentamente il grafico riportato in figura 13, il lettore si renderà inoltre conto di come la pendenza dello stesso, in special modo per elevate vite residue, risulti meno accentuata rispetto alla *call* (infatti il *Delta* dell'opzione, riportato in figura 14, non scende mai sotto -1). Ciò è dovuto al *drift* che, spingendo il prezzo verso la barriera, aumenta le probabilità di perforamento della stessa fino a livelli tali da risultare poco "incrementabili" a seguito di movimenti ulteriormente sfavorevoli del prezzo. Naturalmente tale situazione non può non influire sul *Gamma* dell'opzione (figura 15), che, infatti, a differenza della *down and out call*, si presenta positivo per qualsiasi valore del prezzo e della vita residua.

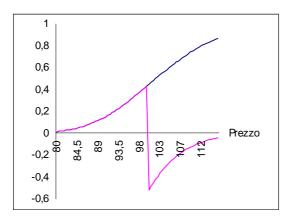
Nel prossimo paragrafo tratteremo del modo con cui, in alternativa al classico *Delta hedging*, può risultare vantaggioso⁸ coprire le tipologie di opzioni appena esaminate. Tuttavia, prima di passare ad altro argomento, può essere utile proporre al lettore una serie di semplici grafici riepilogativi (ottenuti per una vita residua di sei mesi), relativi alle quattro *regular* finora trattate (si vedano i prospetti 1, 2 e 3).

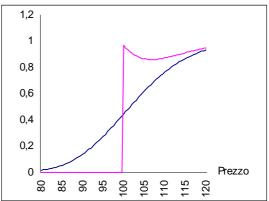
⁸ Va comunque detto (si veda Thomas (1996: 121)) che, data l'entità del *Gamma* delle *regular*, inferiore persino a quello delle semplici *vanilla*, il *Delta hedging* delle opzioni appena esaminate rappresenta un attività tutt'altro che in disuso.



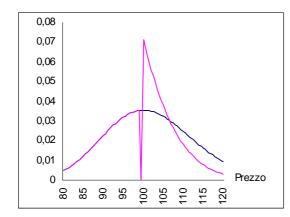


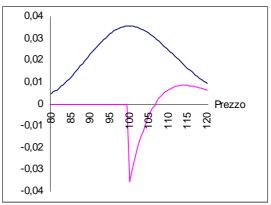
- a) Premio di una down and in call (K=105;H=100)
- d) Premio di una down and out call (K=105;H=100)





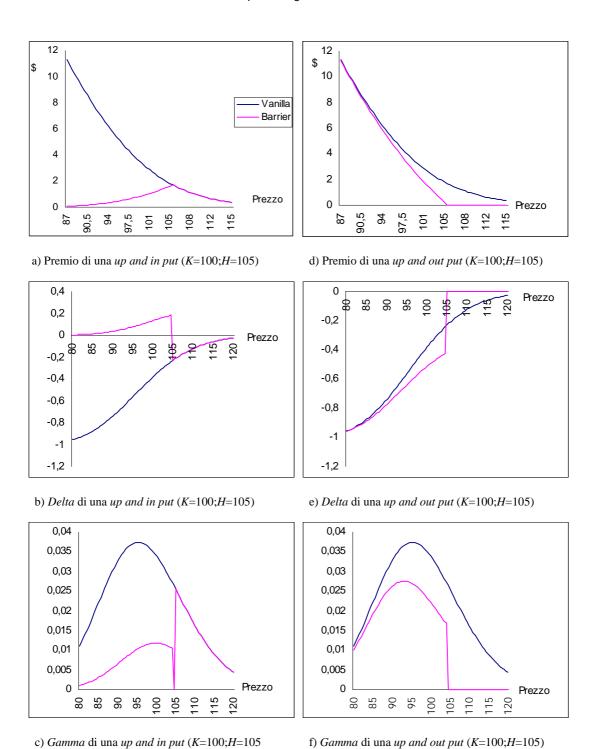
- b) Delta di una down and in call (K=105;H=100)
- e) Delta di una down and out call (K=105;H=100)





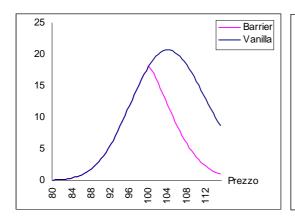
- c) Gamma di una down and in call (K=105;H=100)
- f) Gamma di una down and out call (K=105;H=100)

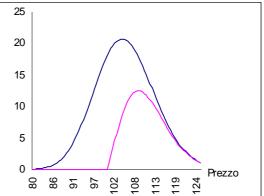
Prospetto 1 - Premio, Delta e Gamma delle down and in call nonché delle down and out call



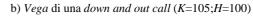
Prospetto 2 - Premio, Delta e Gamma delle up and in put nonché delle up and out put

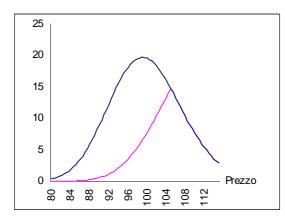
f) Gamma di una up and out put (K=100;H=105)

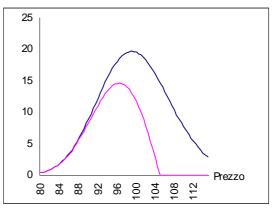




a) Vega di una down and in call (K=105;H=100)







c) Vega di una up and in put (K=100;H=105)

d) Vega di una up and out put (K=100;H=105)

Prospetto 3 - *Vega* delle *regular barrier options*

5.4 La copertura de lle regular barrier option

Fondamento matematico della copertura statica

Nel paragrafo appena concluso abbiamo accennato ad una metodologia di copertura (delle *barrier*) alternativa al solito *Delta hedging*. Per la verità tale metodo⁹ era implicito nel *pricing* stesso delle *barrier* e quindi nelle formule, ad esse relative, che abbiamo fornito nel secondo paragrafo. Si consideri infatti la formula per la valutazione delle *down and in calls*:

$$C_{di} = \left(\frac{H}{S}\right)^{\frac{2a}{\sigma^2}} \left[\left(\frac{H^2}{S}\right) N \left(\frac{\ln(H^2/SK) + rt + \sigma^2 t/2}{\sigma\sqrt{t}}\right) - e^{-rt} KN \left(\frac{\ln(H^2/SK) + rt - \sigma^2 t/2}{\sigma\sqrt{t}}\right) \right]$$

Si faccia ora l'ipotesi (forte) che il tasso senza rischio sia nullo (nel proseguo del paragrafo si avrà modo di mostrare al lettore cosa comporti la rimozione di tale ipotesi). Riorganizzando il tutto otteniamo:

$$\begin{split} C_{di} &= \left(\frac{H}{S}\right)^{\frac{2\left(-\sigma^{2}/2\right)}{\sigma^{2}}} \left[\left(\frac{H^{2}}{S}\right) N \left(\frac{\ln\left(\frac{H^{2}}{K}/S\right) + \sigma^{2}t/2}{\sigma\sqrt{t}}\right) - KN \left(\frac{\ln\left(\frac{H^{2}}{K}/S\right) - \sigma^{2}t/2}{\sigma\sqrt{t}}\right) \right] = \\ &= \left(\frac{S}{H}\right) \left(\frac{H^{2}}{S}\right) N \left(\frac{-\ln\left(S/\frac{H^{2}}{K}\right) + \sigma^{2}t/2}{\sigma\sqrt{t}}\right) - \left(\frac{S}{H}\right) KN \left(\frac{-\ln\left(S/\frac{H^{2}}{K}\right) - \sigma^{2}t/2}{\sigma\sqrt{t}}\right) = \\ &= HN \left(\frac{-\ln\left(S/\frac{H^{2}}{K}\right) + \sigma^{2}t/2}{\sigma\sqrt{t}}\right) - \left(\frac{S}{H}\right) KN \left(\frac{-\ln\left(S/\frac{H^{2}}{K}\right) - \sigma^{2}t/2}{\sigma\sqrt{t}}\right) = \\ &= \frac{K}{H} \left(\frac{H^{2}}{K}N \left(\frac{-\ln\left(S/\frac{H^{2}}{K}\right) + \sigma^{2}t/2}{\sigma\sqrt{t}}\right) - SN \left(\frac{-\ln\left(S/\frac{H^{2}}{K}\right) - \sigma^{2}t/2}{\sigma\sqrt{t}}\right) \right]. \end{split}$$

⁹ Si veda pure Carr (1994) ed in aggiunta Thomas (1996: 121-122) o Taleb (1997: 323-335) (questi ultimi riportano esempi, ma non il metodo di derivazione delle formule).

A questo punto si rende piuttosto utile (ai fini della sola leggibilità della dimostrazione) la sostituzione dell'espressione $\frac{H^2}{K}$ con un più celere ed indicativo K_1 . Proseguendo oltre:

$$\begin{split} C_{di} &= \frac{K}{H} \left[K_1 N \left(\frac{-\ln(S/K_1) + \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}} \right) - S N \left(\frac{-\ln(S/K_1) - \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}} \right) \right] = \\ &= \frac{K}{H} \left[K_1 N \left(-\frac{\ln(S/K_1) - \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}} \right) - S N \left(-\frac{\ln(S/K_1) + \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}} \right) \right]. \end{split}$$

Tra parentesi quadre ritroviamo la formula di valutazione delle *vanilla put* (con *drift* nullo). Ciò permette di stabilire la seguente uguaglianza:

$$C_{di} = \frac{K}{H} Vanilla Put(S, K_1).$$

In base a questa equazione è possibile coprire una down and in call costruendo una replica della stessa costituita da una quantità $\frac{K}{H}$ di vanilla puts con medesima vita residua e volatilità della barrier (nonché chiaramente medesimo sottostante), ma con uno strike K_1 fissato a quota $\frac{H^2}{K}$. Per quanto riguarda la down and out call vale la pena ricordare come essa sia inevitabilmente legata alla knock-in dalla seguente relazione:

$$C_{di}(K,H) + C_{do}(K,H) = Vanilla \ Call(K)$$
.

Infatti la presenza contemporanea nel portafoglio di una *down and out call* e di una *down and in call* (dotate di medesimo *strike*, barriera e vita residua) garantisce, per qualsiasi prezzo del sottostante, il possesso continuo di una *vanilla call*, per la banale ragione che, qualora dovesse estinguersi la *knock-out*, la *knock-in* offrirebbe automaticamente la medesima *vanilla* persa con il perforamento della barriera. In base a questa relazione è dunque possibile scrivere:

$$C_{do}(K,H) = Vanilla\ Call(K) - \frac{K}{H}Vanilla\ Put(K_1).$$

L'equazione ci dice che, per coprire la vendita di una down and out call, è sufficiente acquistare una vanilla call dotata del medesimo strike della barrier nonché vendere una quantità K/H di vanilla puts con strike H^2/K .

Passando alle *barrier puts* il ragionamento da seguire è del tutto analogo. Ricordiamo prima di tutto la formula per la valutazione delle *up and in puts* fornita nel secondo paragrafo:

$$P_{ui} = \left(\frac{H}{S}\right)^{\frac{2a}{\sigma^2}} \left[e^{-rt} K \cdot N \left(\frac{\ln(SK/H^2) - rt + \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}} \right) - \left(\frac{H^2}{S}\right) N \left(\frac{\ln(SK/H^2) - rt - \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}} \right) \right]$$

Ponendo r = 0 e procedendo al solito (sostituzione di H^2/K con K_1):

$$P_{ui} = \frac{S}{H} \left[K \cdot N \left(\frac{\ln \left(S / \frac{H^2}{K} \right) + \sigma^2 t / 2}{\sigma \sqrt{t}} \right) - \left(\frac{H^2}{S} \right) N \left(\frac{\ln \left(S / \frac{H^2}{K} \right) - \sigma^2 t / 2}{\sigma \sqrt{t}} \right) \right] =$$

$$= \frac{K}{H} \left[S N \left(\frac{\ln \left(S / K_1 \right) + \sigma^2 t / 2}{\sigma \sqrt{t}} \right) - K_1 N \left(\frac{\ln \left(S / K_1 \right) - \sigma^2 t / 2}{\sigma \sqrt{t}} \right) \right] =$$

$$= \frac{K}{H} Vanilla Call(S, K_1).$$

La replica di una *up and in put* è dunque costituita da una quantità K/H di *vanilla calls* con *strike* H^2/K . Per quanto riguarda la *up and out put* possiamo utilizzare la medesima relazione vista per le *calls*:

$$P_{ui}(K,H) + P_{uo}(K,H) = Vanilla\ Put(K)$$

da cui

$$P_{uo}(K,H) = Vanilla Put(K) - \frac{K}{H} Vanilla Call(K_1).$$

L'equazione appena fornita suggerisce la replica della *up and out put* effettuata attraverso l'acquisto di una *vanilla put*, dotata del medesimo *strike* della *barrier*, nonché attraverso la vendita di una quantità K/H di *puts* con *strike*, al solito, pari ad H^2/K .

Volendo prescindere per un attimo dal meccanicismo matematico¹⁰, si può cercare di offrire un'interpretazione più "intuitivo-economica" della replica di barrier tramite vanilla. Avevamo già abbondantemente accennato, in merito alle knock-out, ad una sorta di possibile scissione del valore della barrier in due componenti distinte: la tradizionale componente vanilla e la più specifica componente barriera (componente questa algebricamente negativa; infatti la barrier vale sempre meno della vanilla). Prendiamo ad esempio una down and out call: la componente vanilla sarebbe in questo caso rappresentata semplicemente da una vanilla call con strike identico a quello della barrier; la componente barriera, che, come noto, porta il valore dell'esotica a diminuire sempre più all'avvicinarsi del sottostante per l'appunto alla barriera (si tratterebbe in sostanza di una componente negativa crescente, in senso assoluto, al decrescere del prezzo sottostante), potrebbe essere opportunamente "mimata" dalla vendita di una vanilla put. Lo strike di tale put dovrebbe possibilmente essere simmetrico, rispetto alla barriera, a quello della call. La scelta, per essa, di uno strike posto al di sotto della barriera (di più: con questa a metà strada tra lo strike della call e quello appunto della put) si può motivare con la necessità di agevolare l'annullamento del valore della posizione complessiva (acquisto di call e vendita di put) in corrispondenza della barriera, consistentemente con l'estinzione che l'esotica incontra al perforamento della stessa da parte del prezzo. Data la lognormalità del mondo in cui operiamo la simmetria di cui sopra sarebbe da intendersi in termini logaritmici, ovvero:

$$\ln\left(\frac{K}{H}\right) = \ln\left(\frac{H}{K_1}\right),$$

¹⁰ Si veda anche Carr (1994).

dove K è lo *strike* della *call* e K_1 quello della *put* (H è la barriera).

Dalla relazione di cui sopra segue: $K_1 = H^2/K$. Resterebbe però da definire la quantità esatta di *put* da vendere: se infatti, per definizione, la componente *vanilla* deve essere necessariamente unitaria, non altrettanto può dirsi dell'altra componente (componente in qualche modo residuale). Per determinare tale quantità consideriamo prima di tutto il valore complessivo della posizione (posto x la quantità di *put* da vendere), quale si è venuta delineando finora (con *drift* nullo):

$$\begin{split} V_P &= SN \Biggl(\frac{\ln(S/K) + \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}} \Biggr) - KN \Biggl(\frac{\ln(S/K) - \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}} \Biggr) - \\ -x \Biggl[-SN \Biggl(\frac{-\ln(S/K_1) - \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}} \Biggr) + K_1 N \Biggl(\frac{-\ln(S/K_1) + \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}} \Biggr) \Biggr] \,. \end{split}$$

Poiché ci proponiamo di replicare il valore di una *down and out call*, l'espressione di cui sopra deve valere, per S=H, esattamente zero. Sostituendo inoltre $K_1 = H^2/K$, otteniamo:

$$V_{P} = HN \left(\frac{\ln(H/K) + \sigma^{2}t/2}{\sigma\sqrt{t}} \right) - KN \left(\frac{\ln(H/K) - \sigma^{2}t/2}{\sigma\sqrt{t}} \right) -$$

$$-x \left[-HN \left(\frac{-\ln(K/H) - \sigma^{2}t/2}{\sigma\sqrt{t}} \right) + K_{1}N \left(\frac{-\ln(K/H) + \sigma^{2}t/2}{\sigma\sqrt{t}} \right) \right] = 0.$$

$$\left(\ln(H/K) + \sigma^{2}t/2 \right) \qquad \left(\ln(H/K) - \sigma^{2}t/2 \right)$$

Posto
$$N\left(\frac{\ln(H/K) + \sigma^2 t/2}{\sigma\sqrt{t}}\right) = A$$
 e $N\left(\frac{\ln(H/K) - \sigma^2 t/2}{\sigma\sqrt{t}}\right) = B$ l'equazione diventa:

$$HA - KB + xHB - xK_1A = 0$$
;

da cui

$$A(H-xK_1)+B(xH-K)=0.$$

L'equazione è risolta per $x = \frac{K}{H}$.

Problemi connessi all'utilizzo della copertura statica

Lo static hedging tramite vanilla presenta ovviamente alcuni inconvenienti. In primo luogo è il caso di far notare come la copertura offra assoluta precisione soltanto in presenza di drift nullo ed in totale assenza di skew. La necessità di un tasso nullo si spiega con l'analoga ipotesi di partenza, in virtù della quale è stato possibile derivare il modello. Per quanto riguarda la seconda condizione (l'assenza di skew), questa si rende necessaria in considerazione dell'uguaglianza che il modello impone tra le volatilità relative alle vanilla (nonostante il diverso strike) e la volatilità implicita della barrier: la presenza di skew renderebbe al contrario impossibile tale uguaglianza.

Sebbene per le opzioni valutarie l'ipotesi di assenza di *drift* si addolcisca in una più blanda ipotesi di uguaglianza tra i tassi sulle diverse valute (è presumibilmente più facile trovare due tassi simili che un tasso azzerato¹¹), sebbene inoltre il problema non si ponga nemmeno nel caso di *barrier* scritte su sottostante *forward* (con tocco della barriera verificato rispetto a quest'ultimo: è questa peraltro una *feature* piuttosto rara), ciononostante la questione tasso non è assolutamente da sottovalutare. In figura 16 e 17 si riporta il valore della replica (ottenuta tramite *vanilla*) di una *down and out call* in funzione del prezzo e della vita residua, nonché il *Delta* della stessa.

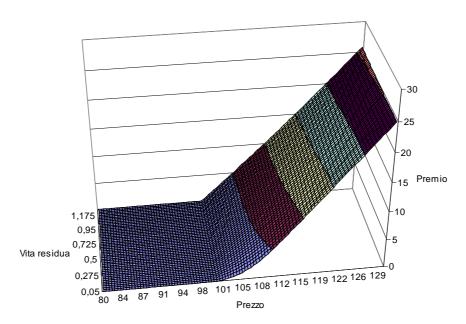


Figura 16 Valore della replica (tramite vanilla) di una down and out call nello "spazio" e nel "tempo"

¹¹ Va però ricordato come esista un effetto analogo a quello del tasso estero anche per le opzioni non valutarie: è l'effetto indotto dall'eventuale presenza di un "tasso di dividendo", pagato sull'attività sottostante.

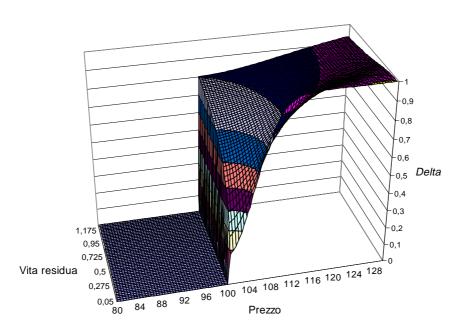


Figura 17 - Delta della replica (tramite vanilla) di una down and out call per diversi prezzi e vita residua

Non è particolarmente difficile notare (ed in questo la funzione *Delta* aiuta in modo particolare) come la differenza di comportamento tra la posizione replicante e la *barrier* si aggravi soprattutto in presenza di un'elevata vita residua. In effetti il tempo mancante prima della scadenza fa in qualche modo da amplificatore del *drift*, offrendo ad esso il modo di agire durevolmente: del resto non a caso troviamo, nelle formule, il tasso sempre accompagnato dalla vita residua.

Comportandosi dunque come una *down and out call* con tasso senza rischio azzerato, la replica presenta un *Delta* più modesto rispetto alla *barrier* (nel caso di tasso non nullo), poiché ogni movimento del sottostante (in direzione opposta alla barriera) risulta meno decisivo ai fini della probabilità di perforamento della barriera.

Ad ogni modo, salvo l'utilizzo di opzioni con elevatissima vita residua e salvo l'eventuale presenza di tassi elevatissimi, il problema del *drift*, come si può del resto evincere dallo studio dei grafici, non è tale da inficiare completamente la validità della copertura basata sull'uso di *vanilla*; è possibile del resto ovviare al problema per mezzo di tecniche numeriche: un esempio in proposito è offerto dalla prassi valutativa diffusa tra molti operatori. Si tratta di un metodo costruito appositamente per quelle opzioni barriera che, pur facendo riferimento al prezzo *forward* (il valore della *vanilla* "premio" si calcola sulla base di tale prezzo), prevedano un meccanismo di monitoraggio della barriera basato su prezzi *spot* (che noi supponiamo diversi dai *forward* a causa di un *drift* non nullo). Si è già avuto modo di spiegare come il problema del *drift* non si ponga nel caso di *barrier* basate su prezzi *forward*: si è tuttavia accennato in merito anche alla necessità di un meccanismo di verifica della barriera che faccia parimenti riferimento al prezzo *forward*. Quando tale riferimento è invece incentrato su prezzi *spot* ecco che i parametri di costruzione della replica vanno rivisti: infatti, quando lo *spot* dovesse incontrare la barriera, il prezzo *forward* potrebbe averlo già fatto, o non farlo mai.

Il metodo proposto in Fenics consiste in sostanza nel calcolare il valore della barriera "forwardizzata" (barriera spot × fattore di capitalizzazione; nel calcolo del fattore di capitalizzazione si impiega la vita residua dell'opzione) utilizzandolo, insieme con la barriera *spot*, come estremo di un *range* di diverse barriere virtuali (diverse dunque a seconda del

"tempo" utilizzato nel fattore di capitalizzazione), cui corrispondono, in base alle formule tradizionali, diverse combinazioni di *hedge strike* ed *hedge ratio* (ovvero *strike* e quantità della seconda *vanilla* componente la replica). Utilizzando poi il metodo delle tangenti di Newton si stabilisce quale di queste combinazioni dà origine ad un *risk reversal* (il complesso delle due *vanilla* replicanti la *barrier*) di valore uguale al premio attuale della *barrier*. Si tratta, è il caso di ricordarlo, di una soluzione soltanto approssimata del problema, che comunque garantisce a chi la adotta risultati soddisfacenti.

Per quanto riguarda l'eventuale presenza di *skew*, è chiaro come esso, alterando la volatilità implicita nella *vanilla* con *strike* diverso dalla *knock-out*, crei un disequilibrio tra le opzioni componenti la replica: la conseguenza immediata è un valore residuo della posizione per S=H (in altre parole, a differenza della *knock-out*, la posizione complessiva in *vanilla* non vede annullarsi il proprio valore in corrispondenza della barriera).

La tabella 3 (ottenuta per H=100\$, K=105\$, volatilità implicite pari rispettivamente a 15,7% e 17,4% per la *vanilla* con *strike* più elevato e quella con *strike* più basso, tasso nullo per evitare interferenze nella verifica dell'effetto *skew*, nonché vita residua di 6 mesi) offre una facile conferma numerica.

La tabella mostra una replica che si comporta in maniera impeccabile in assenza di *skew* (4 moltiplicato per 10 alla meno 15 è di fatto zero), ma che in presenza dello stesso sfoggia un -0.45 di troppo per S=H e comunque un comportamento non in linea con la *barrier* per S>H.

Per risolvere il problema è tuttavia possibile fare ricorso a tecniche numeriche ¹³: in sostanza, attraverso varie iterazioni di calcolo su com*put*er, siamo in grado di individuare il valore dello *strike* K_1^* della *put* tale che, determinando attraverso la formula $q = \sqrt{K} / \sqrt{K_1^*}$ anche la quantità di *put* da vendere, consenta al valore della posizione di annullarsi in corrispondenza di S=H.

-

¹³ Si veda anche Taleb (1997: 331-335). Va aggiunto che nel nostro caso si è tralasciato, per semplicità, l'ulteriore aumento di volatilità che il passaggio ad un più basso *strike* dovrebbe comportare.

Tabella 3 - Tentativo di replica di una down and out call in presenza di skew

Asset Price	Knock-out	Replica (senza skew)	Replica (con <i>skew</i>)
93	0	-	-
94	0	-	-
95	0	-	-
96	0	-	-
97	0	-	-
98	0	-	-
99	0	-	-
100	0	4E-15	-0,449
101	0,676	0,676	0,242
102	1,356	1,356	0,938
103	2,040	2,040	1,642
104	2,731	2,731	2,355
105	3,432	3,432	3,077
106	4,144	4,144	3,812
107	4,868	4,868	4,559
108	5,605	5,605	5,319
109	6,357	6,357	6,094
110	7,124	7,124	6,884
111	7,907	7,907	7,688

Tabella 4 - Confronto tra la replica precedente e quella a parametri modificati (in presenza di skew)

Asset Price	Knock-out	Replica tradizionale	Replica modificata
93	0	-	-
94	0	-	-
95	0	-	-
96	0	-	-
97	0	-	-
98	0	-	-
99	0	-	-
100	0	-0,449	-4,784E-06
101	0,676	0,242	0,654
102	1,356	0,938	1,315
103	2,040	1,642	1,985
104	2,731	2,355	2,665
105	3,432	3,077	3,358
106	4,144	3,812	4,064
107	4,868	4,559	4,785
108	5,605	5,319	5,521
109	6,357	6,094	6,274
110	7,124	6,884	7,043
111	7,907	7,688	7,829

Nel nostro caso lo *strike* che cerchiamo è 93,96\$ (sensibilmente diverso dal 95,23\$ che suggerisce il metodo non modificato): per un tale *strike* infatti, in corrispondenza di S=H, il valore della *put* è 2,33\$, che, moltiplicato per $\sqrt{105}/\sqrt{93,96}$, diventa 2,46\$, ovvero l'esatto (o quasi) valore registrato dalla 105call in corrispondenza della barriera. Vendendo dunque una quantità $\sqrt{105}/\sqrt{93,96}$ di 93,96*put* dovremmo essere in grado, in combinazione con la solita 105call, di replicare la *barrier* molto meglio che non utilizzando le formule tradizionali, che ovviamente non tengono nel giusto conto il fenomeno dello *skew*. La tabella 4 permette di apprezzare il netto miglioramento che tale correttivo comporta.

Il problema sembrerebbe dunque in grandissima parte risolto. C'è però un particolare che vale la pena tenere nella debita considerazione: la *vanilla* con volatilità implicita più alta manifesta un *time decay* nettamente accelerato rispetto all'altra opzione componente la replica. Questo significa in sostanza che la replica cambia di valore con il passaggio del tempo ad un ritmo diverso dalla *knock-out*: per la precisione il fatto che nel nostro caso sia la *vanilla* venduta a disporre di una più alta volatilità implicita (a causa dello *skew* negativo), implica un netto vantaggio, in termini di *time decay*, a favore della replica.

La tabella 5 mostra, a parità di condizioni (stesso prezzo), la perdita di valore, rispettivamente della *knock-out* e della replica, che si registra con il passaggio della vita residua da sei a soli tre mesi.

Tabella 5 - *Time decay* registrato nel valore della *barrier* e della replica dopo 3 mesi (a prezzi fermi)

Asset Price	Variazione di valore della knock-out (A)	Variazione di valore della replica (B)	Differenza (A-B)
93	0	-	-
94	0	-	-
95	0	-	-
96	0	-	-
97	0	-	-
98	0	-	-
99	0	-	-
100	0	0,0696	-0,0696
101	-0,1283	-0,0636	-0,0647
102	-0,2526	-0,1909	-0,0617
103	-0,3693	-0,3090	-0,0613
104	-0,4753	-0,4152	-0,0600
105	-0,5679	-0,5075	-0,0604
106	-0,6456	-0,5844	-0,0611
107	-0,7072	-0,6453	-0,0618
108	-0,7524	-0,6901	-0,0623
109	-0,7815	-0,7192	-0,0623
110	-0,7953	-0,7336	-0,0617
111	-0,7952	-0,7346	-0,0606

Come previsto la replica presenta, per qualsiasi livello del prezzo, un decadimento temporale sensibilmente più dolce rispetto a quello relativo alla *down and out call* (l'opposto accadrebbe in caso di *skew* positivo). Questo significa che, in presenza di *skew* negativo (*strike* più bassi implicano volatilità più alte), vendendo una *down and out call* (prezzata nel modo

tradizionale) e coprendosi nel modo sopra specificato, ci si mette in condizioni di beneficiare di un guadagno del tutto inatteso, legato al semplice passaggio del tempo. Chiaramente situazioni di questo genere, in un mercato efficiente, non sono possibili (per lo meno non per lungo tempo): il prezzo della *barrier* verrebbe infatti automaticamente adeguato al ribasso (e a tal fine dovrebbero essere modificati anche i modelli di *pricing*).

Un ultimo accenno merita il *pricing* ¹⁴ delle *knock-out* (basato sulla replica tramite *vanilla*) in presenza di una struttura di volatilità a termine non piatta. Posta ad esempio pari a nove mesi la vita residua nominale della *barrier* e posto pari a sei mesi il tempo medio atteso di vita (prima del *knocking-out*) della stessa, noi dovremmo utilizzare due diverse volatilità nel prezzare le due diverse *vanilla* replicanti l'esotica. Per l'esattezza dovremmo utilizzare la volatilità a nove mesi (la volatilità implicita delle opzioni con nove mesi di vita residua) per valutare la *vanilla* replicante la "componente *vanilla*" e la volatilità a sei mesi per valutare la *vanilla* replicante la "componente barriera" della *knock-out*: non avrebbe infatti molto senso utilizzare la volatilità a nove mesi per una componente (quella barriera) per la quale rilevano esclusivamente i movimenti di prezzo precedenti lo *stopping time* ¹⁵.

Nel caso inoltre di una *knock-in* contraddistinta dalle medesime durata (nove mesi) e *stopping time*, o *first passage time* (sei mesi), della precedente *knock-out*, la volatilità da utilizzare nella valutazione della *vanilla* replicante sarebbe quella (*forward forward*) implicita nel periodo compreso tra lo *stopping time* e la durata nominale dell'opzione: in altre parole la volatilità relativa al periodo di tempo in cui, mediamente, dovrebbe trovare corso la vita della *vanilla* attivata a seguito del perforamento della barriera.

¹⁴ Si veda in proposito l'aneddoto "*The single volatility fudge*" esposto da Taleb (1997: 343-344), nonché la tecnica Dupire-Derman-Kani (1994).

¹⁵ Per il significato e la derivazione matematica dello *stopping time* si veda la sezione di *pricing* relativa alle *american binary*

Appendice matematica

La down and in call

Il valore di una down and in call è dato dal seguente integrale:

$$C_{di} = e^{-rt} \int_{\ln(K/S)}^{+\infty} (Se^{u} - K)g(u)du,$$

dove S è il prezzo spot iniziale.

Per risolverlo è prima di tutto necessario spezzare il problema in due parti, operando nel modo seguente:

$$C_{di} = e^{-rt} \int_{\ln(K/S)}^{+\infty} (Se^{u} - K)g(u)du = e^{-rt} S \int_{\ln(K/S)}^{+\infty} e^{u} g(u)du - e^{-rt} K \int_{\ln(K/S)}^{+\infty} g(u)du ,$$

"esplodendo" poi la funzione g(u) e ricordando che $h = \ln(H/S)$ (ovvero la versione logaritmica della barriera) otteniamo:

$$C_{di} = e^{-rt} S \int_{\ln(K/S)}^{+\infty} e^{u} e^{\frac{2ah}{\sigma^{2}}} \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(u-2\ln H/S - at)^{2}}{\sigma^{2}t}} du - e^{-rt} K \int_{\ln(K/S)}^{+\infty} e^{\frac{2ah}{\sigma^{2}}} \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi t}} \cdot \frac{e^{-\frac{1}{2} \frac{(u-2\ln H/S - at)^{2}}{\sigma^{2}t}}}{e^{-\frac{1}{2} \frac{(u-2\ln H/S - at)^{2}}{\sigma^{2}t}}} du.$$

A questo punto si rende necessaria la sostituzione $x = \frac{u - 2 \ln H/S - at}{\sigma \sqrt{t}}$ (da cui poi $u = x \sigma \sqrt{t} + 2 \ln H/S + at$, e quindi $u' = \sigma \sqrt{t}$), in base alla quale dovremo modificare anche l'estremo inferiore di integrazione, passando da $\ln(K/S)$ a $\left(\ln(KS/H^2) - at\right) / \sigma \sqrt{t}$, ed ottenendo quindi:

$$C_{di} = e^{-rt} S \left(\frac{H}{S}\right)^{\frac{2a}{\sigma^2}} \int_{\frac{\ln(KS/H^2)-at}{\sigma\sqrt{t}}}^{+\infty} e^{u} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \sigma\sqrt{t} \, dx - e^{-rt} K \left(\frac{H}{S}\right)^{\frac{2a}{\sigma^2}} \int_{\frac{\ln(KS/H^2)-at}{\sigma\sqrt{t}}}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} \sigma\sqrt{t} \, dx :$$

sviluppando ulteriormente (moltiplico e divido il primo addendo per $e^{\ln(H/S)^2}$, "esplodo" u ed inverto l'intervallo di integrazione del secondo integrale cambiando il segno degli estremi):

$$C_{di} = S \left(\frac{H}{S}\right)^{\frac{2a}{\sigma^2}} \int_{\frac{\ln\left(KS/H^2\right) - at}{\sigma\sqrt{t}}}^{+\infty} e^{\ln\left(\frac{H}{S}\right)^2} e^{-\ln\left(\frac{H}{S}\right)^2} e^{-rt} e^{x\sigma\sqrt{t} + 2\ln\left(\frac{H}{S}\right) + at} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx - e^{-rt} K \left(\frac{H}{S}\right)^{\frac{2a}{\sigma^2}}.$$

$$\int_{-\infty}^{\ln(H^2/KS)+at} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx;$$

procedendo oltre e tenendo presente come l'argomento del secondo integrale altro non sia se non una distribuzione normale standardizzata, abbiamo:

$$C_{di} = S \left(\frac{H}{S}\right)^{\frac{2a}{\sigma^{2}+2}} \int_{\frac{\ln(KS/H^{2})-at}{\sigma\sqrt{t}}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(4\ln(H/S)+2\pi-2x\sigma\sqrt{t}-4\ln(H/S)-2at+x^{2}\right)} dx - e^{-rt} K \left(\frac{H}{S}\right)^{\frac{2a}{\sigma^{2}}}.$$

$$\cdot N \left(\frac{\ln(H^2/SK) + at}{\sigma \sqrt{t}} \right),$$

ricordando poi che $a = r - \frac{1}{2}\sigma^2$ possiamo scrivere:

$$C_{di} = S\left(\frac{H}{S}\right)^{\frac{2a}{\sigma^2+2}} \int_{\frac{\ln\left(KS/H^2\right)-at}{\sigma\sqrt{t}}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(x-\sigma\sqrt{t}\right)^2} dx - e^{-rt} K\left(\frac{H}{S}\right)^{\frac{2a}{\sigma^2}} N\left(\frac{\ln\left(H^2/SK\right)+at}{\sigma\sqrt{t}}\right).$$

Chiaramente lo sviluppo portato avanti all'interno del primo integrale ha il solo scopo di rendere possibile la sostituzione $v = x - \sigma \sqrt{t}$ (da cui $x = v + \sigma \sqrt{t}$ e dunque x' = 1), la quale, accompagnata dalla consueta modifica dell'intervallo di integrazione, rende a sua volta possibile l'isolamento della solita funzione di densità normale standardizzata (con conseguente possibilità di utilizzo della funzione cumulata per la risoluzione dell'integrale); infatti:

$$C_{di} = S\left(\frac{H}{S}\right)^{\frac{2a}{\sigma^{2}}+2} \int_{\frac{\ln(KS/H^{2})-at-\sigma^{2}t}{\sigma\sqrt{t}}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}v^{2}} dv - e^{-rt} K\left(\frac{H}{S}\right)^{\frac{2a}{\sigma^{2}}} N\left(\frac{\ln(H^{2}/SK)+at}{\sigma\sqrt{t}}\right) =$$

$$= \left(\frac{H}{S}\right)^{\frac{2a}{\sigma^{2}}} \left[S\left(\frac{H}{S}\right)^{2} N\left(\frac{\ln(H^{2}/SK)+at+\sigma^{2}t}{\sigma\sqrt{t}}\right) - e^{-rt} K \cdot N\left(\frac{\ln(H^{2}/SK)+at}{\sigma\sqrt{t}}\right)\right] =$$

$$= \left(\frac{H}{S}\right)^{\frac{2a}{\sigma^{2}}} \left[\left(\frac{H^{2}}{S}\right) N\left(\frac{\ln(H^{2}/SK)+rt+\sigma^{2}t/2}{\sigma\sqrt{t}}\right) - e^{-rt} K \cdot N\left(\frac{\ln(H^{2}/SK)+rt-\sigma^{2}t/2}{\sigma\sqrt{t}}\right)\right].$$