

ALEA

Tech Reports

Valutazione e copertura
delle opzioni binarie e a barriera

Francesco Sguera

Tech Report Nr. 1
Marzo 1999

Alea - Centro di ricerca sui rischi finanziari
Dipartimento di informatica e studi aziendali
Università di Trento - Via Inama 5 - 38100 - Trento
<http://www.cs.unitn.it>

Francesco Sguera (*)

Valutazione e copertura delle opzioni binarie e a barriera

Abstract

Lo scopo di questo lavoro è trattare in modo organico i modelli di valutazione delle opzioni binarie e a barriera che si collocano nel filone "classico" dell'option pricing. Come nella valutazione delle opzioni standard, la problematica del pricing è collegata, ma distinta, da quella della gestione e della copertura delle posizioni. Nell'ordine, si esaminano le opzioni binarie (sia di tipo europeo che di tipo americano), le opzioni a barriera di tipo regular e le reverse barrier option. Nel capitolo conclusivo si presenta un raffronto a mezzo di simulazioni numeriche tra i risultati di strategie di copertura statiche e dinamiche delle tipologie di opzioni sopra menzionate.

(*) Francesco Sguera, laureato in economia presso l'Università di Trento, è collaboratore di ALEA - Centro di ricerca sui rischi finanziari.

Introduzione

Da quando, negli anni settanta, grazie al contributo di studiosi del calibro di Black, Merton e Scholes (questi ultimi premiati nel 1997 con il premio Nobel), si rese disponibile un rigoroso modello di valutazione delle opzioni, il mercato di tali derivati è andato incontro ad uno sviluppo notevolissimo. Come spesso accade quando un prodotto finanziario si diffonde e diventa familiare, in un inevitabile processo evolutivo, a partire dalle originarie opzioni standard si sono via via generate delle “mutazioni”: il risultato di tali mutazioni sono le opzioni esotiche (dette non a caso opzioni di “seconda generazione”). Tali strumenti trovano la loro ragion d’essere in particolari esigenze del mercato. Un esempio emblematico al riguardo è rappresentato dalle opzioni a barriera, che devono il loro notevole successo alla domanda di strumenti finanziari che, pur garantendo funzionalità analoghe a quelle offerte dalle opzioni standard, richiedessero nel contempo un minore esborso in termini di premio. Nella prima metà degli anni novanta queste opzioni “anomale” hanno conosciuto uno sviluppo non indifferente, ma anche un primo fenomeno di selezione: le opzioni dalle caratteristiche troppo intricate, frutto più di una logica di innovazione di prodotto artificiosa piuttosto che di reali esigenze degli utilizzatori finali, hanno incontrato un progressivo declino. Da tale selezione sono sopravvissute le opzioni esotiche dotate di un più solido e concreto fondamento economico: in particolare le opzioni a barriera e binarie, che rappresentano sicuramente le più diffuse tipologie di opzioni esotiche. Precisamente di tali strumenti si occupa il presente lavoro, che è suddiviso in sette capitoli. I primi due capitoli hanno carattere introduttivo (concetti di *pricing* e classificazione delle esotiche trattate). Il terzo e il quarto sono dedicati alle binarie rispettivamente di tipo europeo e di tipo americano. Il quinto tratta delle opzioni a barriera di tipo normale, il sesto delle *reverse barrier*, nel settimo capitolo si è provveduto ad effettuare un raffronto a mezzo di simulazioni numeriche tra lo *static* ed il *dynamic hedging* di alcune delle opzioni sopra menzionate, in presenza di diversi scenari. In ciascuno dei capitoli dedicati ad una tipologia specifica, dopo una derivazione delle formule di valutazione, è oggetto di approfondimento il comportamento dell’opzione in funzione delle variabili fondamentali (in particolare il prezzo del sottostante, la volatilità, la vita residua dell’opzione ed il tasso d’interesse); conclude infine l’analisi in ciascun capitolo uno studio delle possibilità di copertura, dinamica o statica, dei rischi connessi all’utilizzo di tali derivati.

Con questo *paper* non si intende esaurire una materia, complessa e in continua evoluzione, quale è il *pricing* delle opzioni esotiche. Lo scopo è piuttosto quello di trattare in modo organico i modelli di valutazione che si collocano nel filone canonico dell’*option pricing*. Come nella valutazione delle opzioni standard, la problematica del *pricing* è collegata, ma distinta, da quella della gestione e della copertura delle posizioni. Se nel momento del *pricing* i modelli teorici bastano, per così dire, a se stessi, nel secondo, la gestione delle posizioni, essi vanno vagliati nella loro applicabilità, che dipende dall’aderenza, o meno, delle condizioni di mercato reali a quelle stilizzate nei modelli.

Come si avrà modo di dimostrare, lo studio accurato e critico degli indicatori di valutazione è utilissimo per individuare le falle dei modelli, e così sapere quando seguirne fedelmente i dettami e quando invece ripiegare su “tecnologie finanziarie” più empiriche ma, nel contempo, più robuste.

Indice

Capitolo 1 - I modelli di valutazione delle opzioni standard	1
1.1 Ipotesi fondamentali circa il movimento dei prezzi e lemma di Ito	1
1.2 Il modello di Black e Scholes	4
1.3 L'approccio probabilistico	6
Capitolo 2 - Classificazione delle opzioni binarie e a barriera	9
2.1 Opzioni binarie	9
2.2 Opzioni barriera\	13
Capitolo 3 - Opzioni binarie di tipo europeo	17
3.1 Definizione e payoff	17
3.2 Il prezzo di un'opzione binaria di tipo europeo	18
3.3 Caratteristiche generali delle european digital option	19
3.4 Copertura tramite dynamic hedging	25
3.5 Copertura statica tramite vertical spread	26
3.6 Il caso della presenza di skew	28
3.7 Metodologie di trading e di copertura dinamica: conclusioni	29
Capitolo 4 - Opzioni binarie di tipo americano	31
4.1 Definizione e payoff	31
4.2 Pricing delle digital americane	32
Le immediate binary options e la densità di probabilità del "primo tocco"	37
4.3 Valore e sensibilità delle digital americane	39
Deferred up and in	39
Immediate up and in	43
Deferred down and in	44
4.4 Copertura delle digital americane	46
La copertura statica delle binarie americane	52
Appendice Matematica	57
Capitolo 5 - Opzioni regular barrier	61
5.1 Definizione e payoff	62
5.2 Pricing delle regular barrier option	63
La down and in call	64
Il rebate della down and in call	65
La up and in put e relativo rebate	66
La down and out call	67
La up and out put	68
5.3 Valore e sensibilità delle regular barrier option	71
Le knock-in regular barrier option	71
Le knock-out regular barrier options	78
5.4 La copertura delle regular barrier option	88
Fondamento matematico della copertura statica	88
Problemi connessi all'utilizzo della copertura statica	91
Appendice matematica	98
Capitolo 6 - Opzioni reverse barrier	101
6.1 Definizione e payoff	101
6.2 Pricing delle reverse barrier option	102
La up and in call	102
Il rebate di una up and in call	103
La down and in put (con e senza rebate)	104
La up and out call	105
La down and out put	106
6.3 Analisi dei coefficienti di sensibilità delle reverse barrier option	109
Le knock-in reverse barrier options	109

Le knock-out reverse barrier options	116
6.4 La copertura delle reverse barrier option	127
Appendice Matematica	135
Capitolo 7 - Confronto numerico tra <i>dynamic</i> e <i>static hedging</i> delle opzioni binarie e a barriera	139
7.1 La down and in call.....	140
7.2 La down and out call.....	146
7.3 La up and out call	149
7.4 La up and in call	154
7.5 La up and in cash or nothing american digital.....	157
BIBLIOGRAFIA	163

Capitolo 1 - I modelli di valutazione delle opzioni standard

In questo primo capitolo cercheremo di offrire un'esposizione il più possibile breve e concisa dell'impianto di valutazione su cui poggia il metodo EDP (dall'Equazione alle Derivate Parziali utilizzata da Black e Scholes per la derivazione dell'omonima celeberrima formula) nonché il cosiddetto metodo "probabilistico", di cui faremo largo uso nel prosieguo del lavoro. È bene sottolineare come lo scopo di questa brevi pagine sia semplicemente quello di richiamare nozioni che si presumono in gran parte note al lettore. Prima di illustrare i metodi sopra citati è però opportuno definire preliminarmente alcune ipotesi circa il comportamento del prezzo del sottostante.

1.1 Ipotesi fondamentali circa il movimento dei prezzi e lemma di Ito

Per giungere a formule di *pricing* analiticamente trattabili, si assumono prezzi guidati da un motore aleatorio riconducibile al cosiddetto processo di Wiener. Cominciamo dunque col considerare il movimento casuale di una variabile $W(t)$ attraverso una misura discreta del tempo:

$$W(t+1) = W(t) + \varepsilon(t+1); \text{ con } W(0) = W_0 \text{ ed } \varepsilon \sim N(0,1) \quad (1)$$

Questa equazione ci propone un movimento della variabile W tale per cui al tempo $(t+1)$ essa assume il valore del tempo t aumentato di un termine stocastico ε che si distribuisce secondo una distribuzione normale standardizzata, ovvero secondo una normale con media pari a zero e varianza pari a uno. Inoltre si assume che il fattore stocastico in questione si comporti in maniera del tutto indipendente dal suo andamento anteriore (più formalmente potremmo dire che la covarianza tra due realizzazioni di ε , $\varepsilon(s)$ ed $\varepsilon(r)$, è nulla per qualsiasi coppia di valori r ed s con $s > r$).

Se a questo punto consideriamo un incremento nella variabile t (nel tempo) pari ad una frazione Δ dell'unità originaria, allora la (1) diventa:

$$W(t+\Delta) = W(t) + e(t+\Delta); \text{ con } W(0) = W_0 \text{ ed } e \sim N(0,\Delta) \quad (2)$$

Il fattore stocastico deve a questo punto distribuirsi con una varianza pari a Δ . In effetti solo in questo modo la varianza della somma di $1/\Delta$ fattori e è pari ad 1, e si mantiene quindi l'equivalenza tra la (2) e la (1). Ciò accade in virtù della proprietà dell'operatore varianza per la quale:

$$\text{VAR}(e_1+e_2+\dots+e_{1/\Delta}) = \text{VAR}(e_1) + \text{VAR}(e_2) + \dots + \text{VAR}(e_{1/\Delta}) + \text{COV}(e_1, e_2, \dots, e_{1/\Delta}) = \frac{1}{\Delta} \Delta = 1$$

essendo nulla, per ipotesi, la covarianza tra i fattori stocastici considerati.

Se poi facciamo tendere $\Delta \rightarrow dt$, otteniamo:

$$W(t + dt) = W(t) + e(t + dt); \text{ con } W(0) = W_0 \text{ ed } e \sim N(0, dt)$$

dove dt è una frazione infinitesima dell'unità di tempo originaria definita in maniera tale che $(dt)^\alpha = 0$, per qualsiasi $\alpha > 1$. Questa definizione di dt è detta "euristica" poiché non si tratta che di un espediente necessario per rendere possibili alcune semplificazioni molto utili. Infatti essa rende possibile l'enunciazione delle seguenti proprietà¹ di $dW(t)$:

1. $E[dW(t)] = 0$, dove $dW(t) \equiv W(t + dt) - W(t) = e(t + dt)$
2. $E[dW(t)dt] = 0$
3. $E[dW(t)^2] = dt$
4. $\text{Var}[dW(t)^2] = 0$
5. $E[(dW(t)dt)^2] = 0$
6. $\text{Var}[dW(t)dt] = 0$

L'utilità di queste proprietà si coglie in virtù delle seguenti considerazioni: è nota, oltre che estremamente intuitiva, la proprietà per cui il valore atteso della funzione di una variabile casuale è pari al valore (in questo caso unico) della funzione stessa, qualora la varianza associata alla funzione è pari a zero (in altre parole la funzione della variabile casuale è costante). In termini formali:

$$E[f(dW)] = f(dW) \text{ se } \text{Var}[f(dW)] = 0.$$

Quanto sopra esposto permette di arrivare alle seguenti relazioni:

1. $dW(t)^2 = dt$, ovvero $dW(t)^2$ è un termine non stocastico (varianza nulla) con valore pari al suo valore atteso dt .
2. $dW(t)dt = 0$
3. $dt^2 = 0$

Il processo $W(t)$, oggetto di tutte le precedenti argomentazioni, è detto *processo di Wiener standard* e possiede a sua volta le seguenti proprietà² (derivate dalle precedenti):

1. $W(t)$ è continuo in t .
2. $W(t)$ non è derivabile.
3. $W(t)$ è un processo in cui la somma delle singole variazioni è potenzialmente illimitata.
4. $W(t)$ è un processo in cui la somma delle variazioni elevate al quadrato è limitata (con valore atteso pari a Δt , cioè alla varianza di $(W(t + \Delta t) - W(t))$).
5. La distribuzione condizionata di $W(u)$ dato $W(t)$, con $u > t$, è una distribuzione normale con media $W(t)$ e varianza $\Delta t (=u-t)$.
6. La varianza di $W(u)$ cresce indefinitamente al tendere di u ad infinito.

¹ Per una derivazione ragionata (e nel contempo semplice) di tali proprietà si veda Shimko (1992: 4-5).

² Ancora si veda Shimko (1992: 6).

Il processo di Wiener standard tuttavia necessita, ai fini della sua utilizzabilità concreta, di alcune semplici modifiche. In effetti, per meglio modellare il movimento dei prezzi sui mercati finanziari, si è preferito utilizzare, al posto del processo di Wiener puro e semplice, una funzione dello stesso che adatti il modello a certe caratteristiche proprie del mercato, il cui comportamento si intende, il più fedelmente possibile, riprodurre.

Tale funzione del processo di Wiener può essere così definita:

$$dX = \alpha(X,t) dt + \sigma(X,t) dW ; \text{ con } X(0) = X_0$$

dove X è il prezzo di mercato, $\alpha(X,t)$ ed $\sigma(X,t)$ sono funzioni dello stesso prezzo e del tempo, mentre dW è appunto il processo di Wiener standard di cui dX è funzione.

Volendo compiere una semplificazione ulteriore possiamo porre: $\alpha(X,t) = \alpha X$; $\sigma(X,t) = \sigma X$; ottenendo:

$$dX = \alpha X dt + \sigma X dW .$$

L'equazione precedente descrive il moto geometrico Browniano. Il moto geometrico Browniano è appunto l'ipotesi fondamentale, circa i movimenti del prezzo del sottostante, su cui poggia l'intera analisi tradizionale diretta al *pricing* delle opzioni, di prima o seconda generazione che siano. Accanto ad esso un ruolo essenziale, all'interno dell'analisi di Black e Scholes, è svolto dal celebre lemma di Itô, sulla cui base è possibile descrivere il comportamento di una funzione di una variabile casuale, che sia oggetto di un processo stocastico del tipo visto poc'anzi. Consideriamo dunque una funzione generica in X e in t , $f(X, t)$, dove X segue un processo di Wiener generalizzato e t è una variabile deterministica. Sulla base dello sviluppo in serie di Taylor si giunge a definire il differenziale della funzione come segue³:

$$f = f(X,t)$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial X} dX + \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial X^2} dX^2 + 2 \frac{\partial f}{\partial X \partial t} dX dt + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} dt^2 \right]$$

Poiché $dX dt = 0$ e $dt^2 = 0$ (si vedano a tal scopo le relazioni illustrate in precedenza), l'espressione può essere ulteriormente semplificata:

$$df = \frac{\partial f}{\partial X} dX + \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} dX^2$$

Abbiamo ipotizzato che la dinamica della variabile casuale X sia modellata da un'equazione differenziale stocastica del tipo descritto dall'equazione:

$$dX = A(X,t)dt + B(X,t)dW ;$$

dove A e B sono funzioni di X e t .

Sapendo, da quanto prima enunciato, che $dW^2 = dt$, $dW dt = 0$, $dt^2 = 0$ si ottiene:

$$dX^2 = (A dt + B dW)^2 = (B dW)^2 + 2 A B dW dt + (A dt)^2 = B^2 dt$$

sostituendo i valori così definiti (dX e dX^2) nell'equazione che spiega df si giunge alla conclusione che il differenziale della funzione $f(X, t)$ è descritto dalla seguente equazione alle derivate parziali:

$$df = B \frac{\partial f}{\partial X} dW + \left(A \frac{\partial f}{\partial X} + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} B^2 \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} \right) dt .$$

³ Per un confronto si veda Shimko (1992: 13-16) e anche Neftci (1996: 194-205).

Siamo a questo punto pronti per una rapida analisi dell'impianto di valutazione di Black e Scholes.

1.2 Il modello di Black e Scholes

Il contributo offerto da Black, Merton e Scholes alla valutazione delle opzioni è fino ad oggi insuperato. Ne è la prova il premio Nobel recentemente assegnato a Merton e a Scholes (Black purtroppo non è vissuto abbastanza da poter godere di tale meritato riconoscimento) anche in considerazione dell'enorme sviluppo del mercato delle opzioni, cui la loro rigorosa metodologia di *pricing* ha non poco contribuito.

Il modello proposto da Black e Scholes (1973) permette di calcolare il valore teorico dell'opzione costruendo un portafoglio, dato da un'opzione più una certa quantità, posta pari a Δ , dell'attività sottostante all'opzione stessa, in modo che dia un rendimento privo di rischio.

Ipotesi principali per questo modello sono:

- l'andamento dei prezzi è modellato da un moto geometrico Browniano a tempo continuo;
- il tasso di interesse r e la volatilità dell'attività sottostante mantengono un valore costante durante tutta la vita dell'opzione;
- non vi sono costi di transazione;
- il mercato tende ad un equilibrio nel quale non vi sono possibilità di arbitraggio privo di rischio;
- la negoziazione dell'attività sottostante è continua;
- può essere acquistata o venduta (anche allo scoperto) qualunque quantità (non necessariamente un lotto di negoziazione) dell'attività sottostante.

Rispettate tutte queste ipotesi e supponendo inoltre, per semplificare il modello, che l'attività sottostante non paghi dividendi si consideri una opzione il cui valore è espresso da una funzione incognita $f(S,t)$.

Si faccia l'ipotesi che il prezzo del sottostante si muova secondo il seguente modello (ricalcato⁴ sull'equazione:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW$$

In base al lemma di Ito trattato nel paragrafo precedente siamo in grado di descrivere nel seguente modo il processo diffusivo seguito da $f(S,t)$:

$$df = \sigma S \frac{\partial f}{\partial S} dW + \left(\mu S \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \right) dt .$$

Si costruisca ora un portafoglio composto da un'opzione acquistata ed una quantità Δ dell'attività sottostante venduta. Il valore del portafoglio è dato da: $\Pi = f - \Delta S$.

La variazione di valore del portafoglio in seguito a variazioni nel prezzo del sottostante è pari a:

⁴ Si noti che α è stato sostituito da μ (e X da S) allo scopo di uniformarsi alla simbologia più diffusa ed evitare così un'inutile motivo di confusione per il lettore esperto.

$$d\Pi = df - \Delta dS$$

Ora sostituendo nell'equazione precedente le appropriate espressioni di dS e df si ottiene il processo stocastico diffusivo seguito da Π :

$$d\Pi = \sigma S \left(\frac{\partial f}{\partial S} - \Delta \right) dW + \left(\mu S \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} + \frac{\partial f}{\partial t} - \mu \Delta S \right) dt$$

Si ponga ora $\Delta = \partial f / \partial S$ e si ipotizzi che il portafoglio possa essere continuamente ricalibrato, in modo tale da mantenere il Δ sempre uguale alla derivata parziale di f rispetto al prezzo. In tal modo si elimina la componente stocastica in dW e ne risulta, di conseguenza, che l'incremento nel valore del portafoglio nell'intervallo di tempo dt è di carattere completamente deterministico e pari a:

$$d\Pi = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \right) dt$$

Si consideri ora $r\Pi dt$, ovvero il guadagno che si ottiene investendo, ad un tasso r , una quantità Π in una attività priva di rischio per un tempo dt ; poiché Π è, in virtù delle ipotesi fatte su Δ , del tutto equiparabile ad un'attività priva di rischio, ne consegue che:

$$r\Pi dt = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \right) dt$$

Poiché $\Pi = f - \Delta S$ e $\Delta = \frac{\partial f}{\partial S}$ l'equazione precedente diventa:

$$r \left(f - S \frac{\partial f}{\partial S} \right) dt = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \right) dt$$

dividendo ora a destra e a sinistra per dt :

$$rf - rS \frac{\partial f}{\partial S} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2}$$

e riordinando poi tale risultato si giunge a definire l'equazione differenziale alle derivate parziali, punto di partenza dell'analisi di Black e Scholes:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} + rS \frac{\partial f}{\partial S} - rf = 0$$

Risolvendo questa equazione alle derivate parziali (opportunamente condizionata⁵) in Black e Scholes (1973) si è ottenuta la seguente formula di valutazione per le opzioni europee:

$$V(S,t) = \phi SN(\phi d_1) - \phi e^{-t} KN(\phi d_2)$$

dove $d_1 = \frac{\ln(S/K) + rt + \frac{1}{2} \sigma^2 t}{\sigma \sqrt{t}}$, $d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{t}$, t è la vita residua dell'opzione, $\phi = 1$ per le *call* e $\phi = -1$ per le *put*.

⁵ Sono necessarie tre condizioni (queste sono quelle relative alla *call*): condizione finale ($C(S,T) = \max(S-K, 0)$), due condizioni al contorno ($C(0,t) = 0$; $\lim_{S \rightarrow \infty} C(S,t) = S$).

Può essere utile proporre ora la versione del modello ottenuta da Merton (1973) per il caso in cui il sottostante paghi dividendi (in realtà è di fatto applicabile anche alle opzioni valutarie, semplicemente sostituendo il tasso dei dividendi con il tasso pagato sulla valuta merce). Si assumerà, per semplificare lo sviluppo, che il sottostante paghi tali dividendi secondo un tasso continuo g . In sostanza dunque il processo diffusivo seguito dal sottostante dovrà essere:

$$dS = (\mu - g)Sdt + \sigma SdW$$

Inoltre la variazione di valore del portafoglio $d\Pi$ nell'infinitesimo di tempo dt diventa a questo punto:

$$d\Pi = df - \Delta dS - gS\Delta dt$$

Procedendo ora con uno sviluppo del tutto analogo a quello "classico" di Black e Scholes otteniamo la seguente equazione alle derivate parziali:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} + (r - g)S \frac{\partial f}{\partial S} - rf = 0$$

Una volta risolta (opportunamente condizionata) si perviene a quanto segue:

$$V(S,t) = \phi e^{-gt} S N(\phi d_1) - \phi e^{-rt} K N(\phi d_2)$$

dove $d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r - g)t + \frac{1}{2}\sigma^2 t}{\sigma\sqrt{t}}$, $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t}$, $\phi = 1$ per le *call* e $\phi = -1$ per le *put*.

Esiste poi un'ulteriore "versione" del modello di Black e Scholes, precisamente quella di Black (1976), per il caso in cui si voglia fare riferimento non ai prezzi *spot*, bensì ai prezzi *forward*. In termini formali:

$$V(S,t) = \phi e^{-rt} F N(\phi d_1) - \phi e^{-rt} K N(\phi d_2)$$

dove $F = Se^{rt}$ (è il prezzo *forward*), $d_1 = \frac{\ln(F/K) + \frac{1}{2}\sigma^2 t}{\sigma\sqrt{t}}$, $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t}$, $\phi = 1$ per le *call* e

$\phi = -1$ per le *put*. Ovviamente, qualora il lettore provasse a sostituire nella formula l'espressione del valore del d'equilibrio *forward* funzione di S e di r (pari a Se^{rt}) otterrebbe facilmente la corrispondente formula di Black e Scholes.

1.3 L'approccio pro babilistico

L'approccio probabilistico fu sviluppato per la prima volta in Cox e Ross (1976). Esso consiste in sostanza nell'attualizzare al tasso senza rischio r_f il *payoff* atteso di un'attività rischiosa (in realtà noi assumeremo che l'attività in questione sia oggetto di copertura, il che, eliminando il rischio, giustifica la scelta del tasso *risk-free* per l'attualizzazione). Poiché, come ovvio, attualizzare al tasso *risk-free* un *payoff*, che, al contrario, ha natura aleatoria e quindi rischiosa, significa essenzialmente "sopravalutare" tale attività (noi infatti attualizzeremo al tasso r un'attività che, in quanto intrinsecamente rischiosa, si apprezza ad un tasso $\mu > r$), è necessario, per compensare tale "errore" (in realtà giustificato dall'ipotesi di copertura dell'attività), commetterne in un certo senso un altro. Si tratta in effetti di sostituire alla distribuzione di probabilità reale (detta anche oggettiva) una distribuzione neutrale al rischio \tilde{P} , la cui utilità

consiste nel far sì che il valore attuale calcolato nel modo specificato si trasformi in una *martingala*.

- Una variabile è una *martingala* quando il processo diffusivo cui è sottoposta non comporta *drift*, e quindi il suo valore atteso futuro coincide con il valore odierno.

Il valore attuale del premio risulta quindi uguale al prezzo odierno dell'attività. Di fatto questa distribuzione "fittizia" di probabilità non fa altro che sostituire il tasso μ di apprezzamento atteso del sottostante con un più opportuno tasso senza rischio. In virtù di questo semplice espediente siamo in grado ad esempio di ottenere la medesima formula sviluppata da Black e Scholes, ma in maniera decisamente più diretta ed intuitiva. Si consideri infatti lo sviluppo seguente.

Applichiamo prima di tutto il lemma di Itô al logaritmo naturale del prezzo sottostante, e consideriamo un intervallo di tempo t intercorrente tra prezzo iniziale e prezzo finale. Otteniamo la seguente equazione (che descrive il processo stocastico della differenza tra logaritmo del prezzo finale e quello del prezzo iniziale):

$$\ln\left[\frac{S(t)}{S}\right] = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma z(t)$$

Poiché $z(t)$ è un processo di Wiener standard con media zero e varianza t l'equazione implica per $\ln[S(t)/S]$ una distribuzione normale con media $(\mu - \sigma^2/2)t$ e varianza $\sigma^2 t$. Ponendo $x = \ln[S(t)/S]$ è lecito affermare che x si distribuisce evidentemente con media $\mu_x = (\mu - \sigma^2/2)t$ e varianza $\sigma_x^2 = \sigma^2 t$.

Il valore atteso (non ancora attualizzato) del *payoff* della *call* a scadenza è:

$$E(PFC) = \int_{-\infty}^{+\infty} \max[Se^x - K, 0] f(x) dx = \int_{\ln(K/S)}^{\infty} (Se^x - K) f(x) dx$$

La restrizione dell'intervallo di integrazione rende superfluo l'operatore max, poiché, per x maggiore di $\ln(K/S)$, $(Se^x - K)$ risulta per forza maggiore di zero.

Passando alla distribuzione standardizzata e ponendo quindi $u = (x - \mu_x)/\sigma_x$, siamo anche costretti a modificare nel seguente modo il termine inferiore di integrazione che diventa:

$$\left[\ln\left(\frac{K}{S}\right) - \mu_x\right] / \sigma_x = -\left[\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \mu_x\right] / \sigma_x$$

Ponendo $d_2 = \left[\ln(S/K) + \mu_x\right] / \sigma_x$ possiamo così riscrivere e sviluppare il valore atteso del *payoff* a scadenza:

$$\begin{aligned} E(PFC) &= S \int_{-d_2}^{\infty} e^{\mu_x + u\sigma_x} f(u) du - K \int_{-d_2}^{\infty} f(u) du \\ &= Se^{\mu_x} \int_{-d_2}^{\infty} e^{u\sigma_x} f(u) du - K[1 - N(-d_2)] \\ &= Se^{\mu_x} \int_{-d_2}^{\infty} e^{u\sigma_x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du - K[1 - N(-d_2)] \\ &= Se^{(\mu_x + \sigma_x^2/2)} \int_{-d_2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{(\sigma_x u - \sigma_x^2/2 - u^2/2)} du - K[1 - N(-d_2)] \end{aligned}$$

$$= Se^{\mu\tau} \int_{-d_2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(u-\sigma_x)^2/2} du - K[1 - N(-d_2)].$$

Effettuando la sostituzione $v = u - \sigma_x$ (con relativo adeguamento dell'intervallo di integrazione) possiamo portare avanti nel seguente modo lo sviluppo:

$$\begin{aligned} E(PFC) &= Se^{\mu\tau} \int_{-d_2 - \sigma_x}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-v^2/2} dv - K[1 - N(-d_2)] \\ &= Se^{\mu\tau} [1 - N(-d_2 - \sigma_x)] - K[1 - N(-d_2)] \\ &= Se^{\mu\tau} N(d_1) - KN(d_2), \end{aligned}$$

dove $d_1 = d_2 + \sigma_x = d_2 + \sigma\sqrt{t}$. L'ultimo passaggio è stato reso possibile dalla seguente proprietà della funzione N (la cumulata della funzione di densità normale standardizzata):

$$N(z) = 1 - N(-z).$$

In base a quanto affermato in precedenza il tasso con cui si apprezza il sottostante, μ , deve essere sostituito dal tasso r : ciò per fare in modo che il valore attuale del valore atteso del *payoff* costituisca una martingala.

Procedendo alla sostituzione in questione e all'attualizzazione (al tasso *risk-free*) del valore atteso del *payoff* otteniamo:

$$C = SN(d_1) - Ke^{-r} N(d_2),$$

dove $d_2 = [\ln(S/K) + (r - \sigma^2/2)t] / (\sigma\sqrt{t})$, mentre $d_1 = d_2 + \sigma\sqrt{t}$. Superfluo dire che si tratta esattamente della formula di Black e Scholes, ottenuta però con un metodo alternativo rispetto a quello storicamente utilizzato per la sua derivazione.

Capitolo 2 - Classificazione delle opzioni binarie e a barriera

Prima di affrontare, nel prosieguo del lavoro, i modelli quantitativi per la valutazione delle opzioni binarie e barriera è sembrato opportuno offrire una breve panoramica generale sui profili contrattuali di tali tipologie di opzioni. Naturalmente tale disamina non impedirà di ripresentare, all'inizio di ogni capitolo, un breve riassunto delle caratteristiche relative alla tipologia trattata, che consenta, al lettore che eventualmente lo desidera, di saltare a piè pari queste (peraltro utili) pagine descrittive a vantaggio di una più celere immersione nel vivo dell'analisi.

2.1 Opzioni binarie

Le opzioni binarie rappresentano la più semplice tipologia di opzioni esotiche. Caratteristica distintiva di questa tipologia è quella di presentare un *payoff*, a scadenza, o comunque al momento dell'esercizio, che sia più generale e in ogni caso diverso da quello previsto per le opzioni ordinarie. Originariamente le opzioni binarie comprendevano solo opzioni del tipo *cash-or-nothing*, ovvero opzioni strutturate in modo tale da risolversi in una scommessa sul valore che l'attività sottostante avrebbe fatto registrare al momento dell'esercizio. Il detentore di un'opzione *call* di questo tipo si trova nella posizione dello scommettitore che punta sull'evento che, a scadenza, l'attività sottostante, S , risulti superiore al prezzo d'esercizio, K . Se questo si verifica egli vince la scommessa ed ottiene un *payoff*, definito pari a B . Il valore di B è costante ed è questa un'altra particolarità delle opzioni *cash-or-nothing*. Infatti al verificarsi dell'evento per cui si scommette ($S > K$ nel caso di acquisto di un *call* o $S < K$ nel caso di acquisto di un *put*), il detentore riceve sempre lo stesso importo, B , qualunque sia l'entità dello scostamento del valore dell'attività sottostante, S , dal prezzo d'esercizio, K . La funzione che definisce il *payoff* per un'opzione *call Cash-Or-Nothing* può, quindi, essere scritta nel modo che segue:

$$C_{con} \begin{cases} 0 & \text{se } S < K \\ B & \text{se } S > K \end{cases}$$

o, alternativamente, il *payoff* può essere espresso utilizzando la funzione di Heaviside $H(\cdot)$. Tale funzione assume valore 1 se il suo argomento è positivo, altrimenti ha valore zero. Posto il *payoff* pari a:

$$C_{con} = B H(S - K)$$

se S è maggiore di K l'argomento della funzione è positivo e il *payoff* è uguale a B , se, viceversa, S è inferiore od uguale a K il *payoff* è nullo. Si verifica così che le due espressioni,

che definiscono il *payoff* di un'opzione *call cash-or-nothing* sono equivalenti. Graficamente esso è individuato dalla curva spezzata riportata in figura 1., per uno schema riassuntivo della struttura del *payoff* netto si faccia riferimento alla tabella 1.

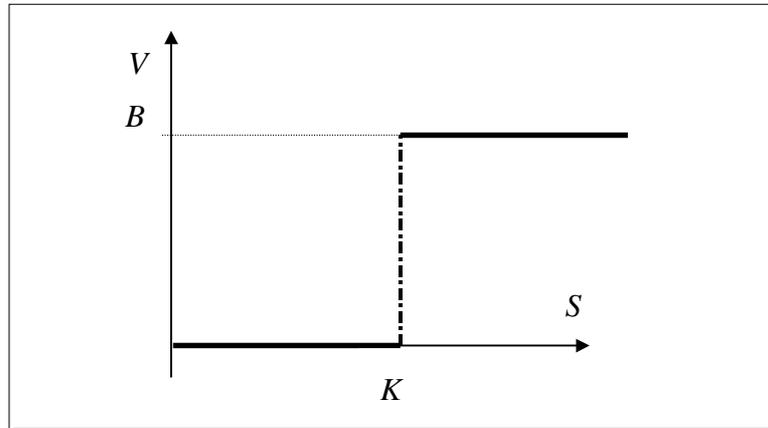


Figura 1 - *Payoff* di un'opzione *call cash-or-nothing*.

Le opzioni binarie appena studiate possono essere distinte in opzioni binarie *at maturity* ed opzioni binarie *one-touch* (cfr. tabella 2). Le prime, conosciute anche come *european binaries*, sono opzioni che richiedono per poter essere esercitate che l'evento per cui si scommette si verifichi alla data di scadenza prevista per l'opzione. Le seconde, conosciute anche come *american binaries*, danno diritto ad ottenere il *payoff* se in qualunque momento durante la vita dell'opzione, compresa la scadenza, l'evento si verifica. Trattandosi, ad esempio, di un'opzione *call* binaria basta che il valore dell'attività sottostante risulti maggiore del prezzo d'esercizio almeno in una delle quotazioni dell'attività avvenute durante la vita dell'opzione affinché il detentore abbia diritto ad esercitarla. Per le opzioni *one-touch*, inoltre, sono previste due diverse modalità di pagamento del *payoff*. Questo, infatti, può avvenire già al momento in cui la condizione limite viene soddisfatta e si parlerà di un'opzione *one-touch immediate binary* oppure il pagamento può essere effettuato solo a scadenza e si tratterà di una *one-touch deferred binary*. Rispetto alle opzioni *at maturity* (*european binaries*) la probabilità di esercizio delle opzioni *one-touch* risulta maggiore perché non è necessario al fine dell'esercizio che l'evento si verifichi alla data di scadenza, ma questo può verificarsi in qualunque momento durante la vita dell'opzione. Ne consegue da ciò che il premio richiesto per l'acquisto delle opzioni *one-touch*, in relazione all'aumento delle probabilità d'esercizio, risulti maggiorato.

<i>Opzioni binarie</i>	$S_T < K$	$S_T > K$
<i>call</i>	$-P^*$	$B - P^*$
<i>put</i>	$B - P^*$	$-P^*$

P^* = premio
 B = ammontare del *payoff*

Tabella 1 - Struttura del *payoff* netto di un'opzione binaria.

Opzioni at maturity (european binaries) → l'evento per cui si scommette deve verificarsi alla data di scadenza.

Opzioni one-touch (american binaries) → l'evento per cui si scommette può verificarsi in qualunque momento durante la vita dell'opzione.

Immediate: il pagamento del *payoff* avviene al verificarsi dell'evento.

Deferred: il pagamento del *payoff* è effettuato a scadenza.

Tabella 2 - Le possibili configurazioni di un'opzione *cash-or-nothing*.

Tra le opzioni binarie vi sono opzioni, simili alle opzioni *cash-or-nothing*, e conosciute come opzioni *asset-or-nothing*, che prevedono al raggiungimento del prezzo di esercizio la consegna di una quantità determinata del titolo sottostante, o il pagamento di un controvalore equivalente.

Un'altra tipologia di opzioni binarie è rappresentata dalle opzioni *supershare*, che presentano, quando sono esercitate un *payoff* pari a:

$$\text{Supershare} = 1/d \cdot [H(S - K) - H(S - K - d)]$$

o ciò che è lo stesso:

$$\text{Supershare} \begin{cases} 0 & \text{se } S \leq K \\ 1/d & \text{se } K < S < K + d \\ 0 & \text{se } S \geq K + d \end{cases}$$

Questo significa che il detentore, al momento dell'esercizio, otterrà un *payoff* positivo e pari a $1/d$ solo nel caso in cui il valore dell'attività sottostante, S , risulti compreso nell'intervallo $[K, K+d]$, il cui limite inferiore è rappresentato dal prezzo d'esercizio. Il *payoff* per questo tipo d'opzione, definito da $1/d$, è funzione inversa dell'ampiezza dell'intervallo stesso; infatti, minore è il valore assegnato a d , maggiore è il *payoff*. Graficamente quest'ultimo può essere descritto, per un'opzione *supershare*, dalla retta spezzata che appare in figura 2.

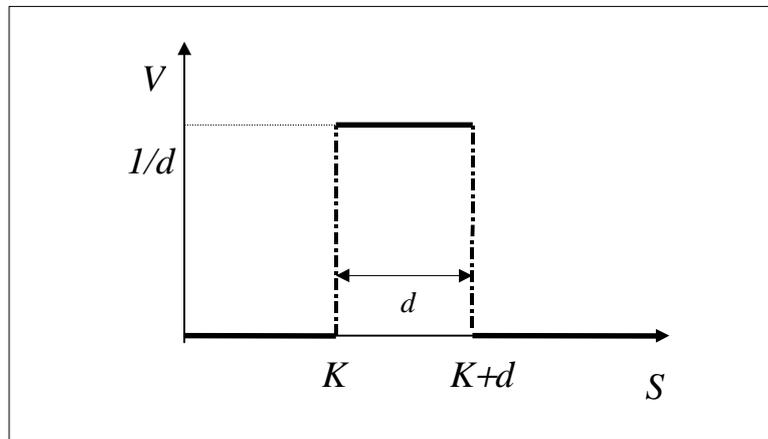


Figura 2 - Payoff di un'opzione *supershare*.

E' possibile replicare il *payoff* di una opzione *supershare* acquistando un'opzione *call* ed un'opzione *put* binarie con prezzo *strike* rispettivamente pari a K e $K+d$ e contemporaneamente contraendo un debito a tasso fisso di pari scadenza a rendimento certo. Tale replica è schematizzata per profili di rendimento in figura 3. Per maggior facilità di esposizione l'operazione è stata suddivisa in due parti. Nella prima serie di tre grafici abbiamo riportato il profilo che si ottiene dall'acquisto di un'opzione *call* binaria e di un'opzione *put* binaria. Nella seconda serie di tre grafici si delinea il profilo di un'opzione *supershare*, che si ottiene contrapponendo al risultato ottenuto dall'acquisto delle due opzioni la vendita del titolo a reddito fisso.

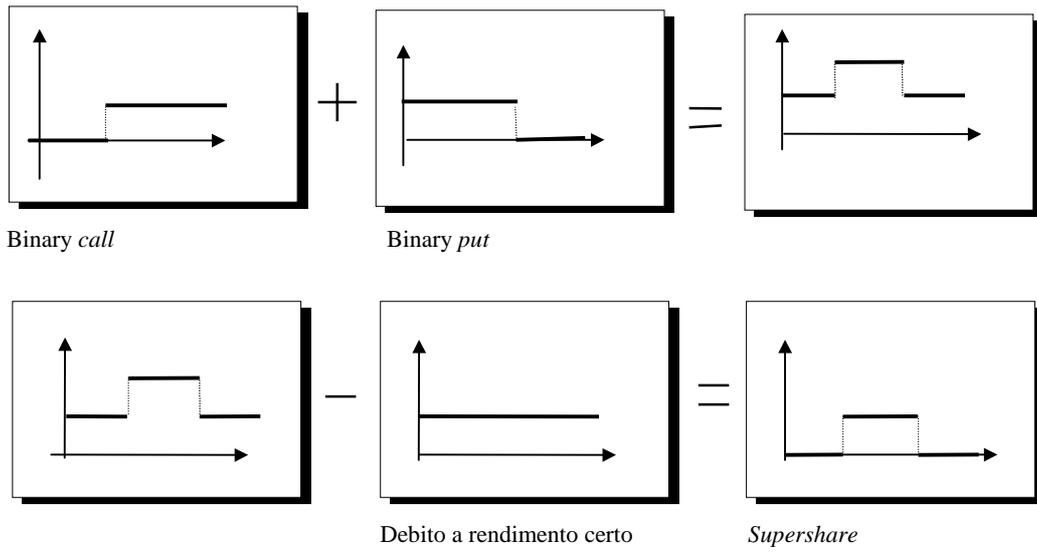


Figura 3 - Replica di un'opzione *supershare*.

2.2 Opzioni barriera

Le opzioni barriera sono state fra le prime opzioni esotiche ad essere negoziate. Una prima *call* del tipo *down-and-out* appare sul mercato OTC americano già nel 1967¹ ma bisogna attendere la fine degli anni ottanta per veder emergere anche altre tipologie di opzioni barriera.

Le opzioni barriera sono opzioni che o appaiono (*in barrier* o *knock-in*) o scompaiono (*out barrier* o *knock-out*) quando il prezzo dell'attività sottostante raggiunge un determinato valore H detto appunto barriera. Sebbene nulla vieti l'applicazione di barriere a qualsiasi opzione, siano esse standard od esotiche, in questa sede saranno considerate solo opzioni che abbiano la struttura di quelle ordinarie di tipo europeo e che ovviamente presentino una barriera. Le opzioni barriera, siano esse *call* o *put*, possono essere distinte in quattro categorie:

- *up-and-in* : il prezzo dell'attività sottostante S deve, prima della scadenza, crescere fino a raggiungere il valore H . Solo in questo caso il detentore avrà diritto ad esercitare l'opzione;
- *down-and-in* : l'opzione "appare" solo nel momento in cui il prezzo dell'attività sottostante decresce fino a raggiungere il valore H ;
- *up-and-out* : il detentore perde il diritto ad esercitare l'opzione se, durante la vita della stessa, l'attività sottostante aumenta fino a raggiungere la barriera;
- *down-and-out* : in questo caso il contratto è cancellato se, entro la scadenza dello stesso, il prezzo dell'attività sottostante raggiunge o va al di sotto del valore barriera H .

Comunemente la barriera si trova nella regione *out-of-the-money*, ossia è posizionata al di sotto del prezzo d'esercizio per un'opzione *call*, al di sopra per un'opzione *put*. Queste opzioni sono dette *standard* (o *regular*) *barrier*. Esistono, tuttavia, altre opzioni barriera che si distinguono in quanto la barriera è posizionata nella regione *in-the-money*. Tali opzioni, dette *reverse barriers*, sono state create in tempi più recenti rispetto alle *standard barriers* e sono oggetto di una negoziazione meno intensa. Tutte le opzioni barriera proprio per la presenza della barriera che limita le possibilità di esercizio hanno premi più contenuti rispetto a quelli previsti per l'acquisto delle corrispondenti opzioni standardizzate di tipo europeo. In particolare, poi, le opzioni *reverse barriers* del tipo *out barrier* che trovano nella presenza di una barriera un limite massimo al *payoff* conseguibile prevedono premi ancora più contenuti.

Appartengono alla categoria delle opzioni *standard barrier*:

- *down-and-out call*: la barriera si trova nella regione *out-of-the-money* ed ha un valore, H , inferiore al prezzo di esercizio, K . Affinché l'opzione non scompaia l'attività sottostante non deve andare al di sotto del valore barriera. Quindi le oscillazioni di prezzo per l'attività sottostante trovano un limite minimo nel valore barriera. Il detentore di una simile opzione si aspetta una volatilità bassa ed una tendenza al rialzo delle quotazioni dell'attività sottostante. Per quanto riguarda il premio, questo diminuisce al diminuire dell'ampiezza dell'intervallo che va da H , valore della barriera, ad K , prezzo di esercizio.
- *down-and-in call*: la barriera si trova nella regione *out-of-the-money* ed il suo valore, H , è minore rispetto a K , prezzo di esercizio dell'opzione. In questo caso affinché l'opzione venga ad esistere occorre necessariamente che durante la vita dell'opzione il valore dell'attività sottostante diminuisca fino a raggiungere il valore della barriera. Successivamente il valore dell'attività sottostante dovrà risalire al di sopra di K per consentirne l'esercizio. Le aspettative di un operatore che investa in questo strumento sono

¹ Si veda Thomas (1996).

di un'alta volatilità dell'attività sottostante. Il premio aumenta al diminuire dell'ampiezza dell'intervallo $H-K$.

- *up-and-out put*: la barriera si trova nella regione *out-of-the-money* ed ha un valore superiore al prezzo di esercizio, K . L'operatore che acquista tale opzione ipotizza bassa volatilità ed una tendenza al ribasso della quotazione dell'attività sottostante. Al diminuire dell'ampiezza dell'intervallo tra il prezzo d'esercizio e la barriera diminuirà, di conseguenza, anche il premio poiché aumenta la probabilità che durante la vita dell'opzione il valore dell'attività sottostante raggiunga la barriera e "sparisca".
- *up-and-in put*: la barriera si trova nella regione *out-of-the-money* ed il suo valore sarà, di conseguenza, superiore al prezzo di esercizio K . Per attivare l'opzione l'attività sottostante deve aumentare fino a raggiungere la barriera. Perché vi sia convenienza ad esercitare l'opzione il prezzo deve di nuovo diminuire al di sotto del valore del prezzo d'esercizio. L'operatore che acquista una siffatta opzione si aspetta dunque grande volatilità del prezzo dell'attività sottostante. Per quanto concerne il premio, invece, esso diminuisce all'aumentare dell'intervallo $H-K$ perché, a parità di altri fattori, diminuisce la probabilità di *payoff* positivi in caso di attivazione.

Appartengono alla categoria delle *reverse barrier*, caratterizzate dalla barriera nel lato *in-the-money*, le seguenti opzioni:

- *up-and-out call*: la barriera si trova nella regione *in-the-money* e di conseguenza H sarà maggiore del prezzo d'esercizio K . In questo caso, quindi, la barriera rappresenta un limite massimo al profitto conseguibile dal detentore, che si aspetta una tendenza solo lievemente rialzista ed una bassa volatilità. Se, infatti, il valore dell'attività sottostante raggiunge o supera il valore barriera l'opzione si disattiva. Per quanto riguarda il premio, esso diminuisce al diminuire dell'ampiezza dell'intervallo $K-H$ poiché aumenta la probabilità che la barriera venga raggiunta.
- *up-and-in call*: la barriera si trova nella regione *in-the-money* ed avrà un valore maggiore rispetto al prezzo d'esercizio K . Se la barriera non viene raggiunta l'opzione non viene attivata. L'operatore, quindi, ipotizzerà una tendenza rialzista che gli permetta di raggiungere la barriera e di mantenersi *in-the-money*. Assumendo uno strike pari al prezzo corrente, il premio aumenta al diminuire dell'ampiezza dell'intervallo $K-H$ poiché la probabilità di raggiungere la barriera è maggiore.
- *down-and-out put*: la barriera si trova nella regione *in-the-money* ed il suo valore H sarà inferiore al prezzo d'esercizio K . L'operatore si aspetta una leggera tendenza al ribasso ed una volatilità contenuta poiché se l'attività sottostante scende al di sotto del valore barriera l'opzione si disattiva e cessa di esistere. Il premio risulta contenuto poiché il *payoff* è limitato e diminuisce al diminuire dell'ampiezza dell'intervallo $H-K$.
- *down-and-in put*: la barriera si trova nella regione *in-the-money* ed il suo valore H sarà inferiore al prezzo d'esercizio K . Solo se il valore dell'attività sottostante scende al di sotto del valore barriera l'opzione diviene attiva.

La struttura delle opzioni barriera può essere ulteriormente complicata dalla presenza di discontinuità della barriera e/o di *rebate*. In particolare si parla di discontinuità della barriera quando questa è una funzione del tempo. In altri termini la barriera svolge la sua funzione solo in determinati periodi durante la vita dell'opzione e questo ne determina la discontinuità.

Un *rebate*, invece, è un pagamento fisso fatto al detentore dell'opzione quando l'attività sottostante raggiunge la barriera (o non la raggiunge mai nel caso delle *knock-in*) e può essere applicato a qualsiasi tipo di opzione barriera, sebbene si tratti di una clausola tipica delle *reverse barrier*. Un'opzione che preveda un *rebate* ha, di conseguenza, un *payoff* più favorevole per il detentore. Infatti il *rebate* può essere considerato come un pagamento fisso riconosciuto in luogo del *payoff* quando la barriera è raggiunta. Nel caso, poi, di un'opzione *up and out*, il *rebate* ha anche la funzione di ridurre i problemi di *hedging*, specialmente quando il valore

dell'attività sottostante è vicino a quello della barriera. Infatti, in prossimità della barriera l'opzione risulta particolarmente “sensibile” alle variazioni del prezzo dello strumento base e, di conseguenza, il fattore *Gamma* dell'opzione, che misura questa sensibilità, risulta molto elevato. Il vantaggio del *rebate* è quello di possedere un fattore *Gamma* che si contrappone e quindi fa diminuire quello di un'opzione *up-and-out*².

Opzioni barriera	$S_T < K$	$S_T > K$
<i>In barrier</i>		
<i>call</i>	$-P^*$	$S_T - K - P^*$
<i>put</i>	$K - S_T - P^*$	$-P^*$
<i>Out barrier</i>		
<i>call</i>	$-P^*$	$-P^*$
<i>put</i>	$-P^*$	$-P^*$

P^* : Premio

Tabella 3 - Risultato netto di una *barrier option* in caso di raggiungimento della barriera.

Opzioni barriera	$S_T < K$	$S_T > K$
<i>In barrier</i>		
<i>call</i>	$-P^*$	$-P^*$
<i>put</i>	$-P^*$	$-P^*$
<i>Out barrier</i>		
<i>call</i>	$-P^*$	$S_T - K - P^*$
<i>put</i>	$K - S_T - P^*$	$-P^*$

P^* : Premio

Tabella 4 - Risultato netto di una *barrier option* in caso di mancato raggiungimento della barriera.

Nelle tabelle 3 e 4 si schematizza il profilo del risultato netto a scadenza per le diverse opzioni barriera trattate rispettivamente nel caso in cui il valore barriera sia stato raggiunto (cfr. tabella 3) e nel caso in cui il valore barriera non sia stato raggiunto (cfr. tabella 4).

Fra le opzioni barriera esistono tipologie anche più complesse. Fra queste ricordiamo le opzioni *corridor*, le opzioni *Mid-Atlantic* e le *partial barrier*.

Le prime, dette anche *double barrier*, si caratterizzano per la presenza di due barriere, una inferiore ed una superiore che delimitano il “corridoio” entro cui il valore del titolo sottostante

² Si veda il capitolo sesto relativo alle *reverse barrier* (ed in particolare l'ultimo paragrafo).

può muoversi. Infatti se durante la vita dell'opzione uno dei due valori barriera viene raggiunto o superato, l'opzione stessa non è più esercitabile.

Le opzioni barriera del tipo *Mid-Atlantic* (o *Bermuda*) sono caratterizzate dal fatto che il monitoraggio della barriera avviene solo a determinati intervalli di tempo.

Le opzioni *partial barrier*, a loro volta, si caratterizzano per la durata del monitoraggio della barriera che non copre tutta la vita dell'opzione. Se il monitoraggio ha inizio posticipato rispetto alla nascita dell'opzione e perdura sino a scadenza, l'opzione è detta *forward-start barrier*.

Si conclude qui questo capitolo dedicato ad una prima familiarizzazione con le strutture contrattuali oggetto del nostro lavoro. Nel prosieguo si entrerà rapidamente nel dettaglio, fornendo uno studio più specifico delle seguenti tipologie di opzioni binarie e a barriera (si tratta ovviamente di una cernita dei contratti ritenuti più significativi tra quelli che hanno trovato menzione in queste pagine):

1. Opzioni binarie di tipo europeo
2. Opzioni binarie di tipo americano (nella varietà *deferred* ed *immediate*)
3. Opzioni a barriera di tipo *regular* (*down and out call*, *down and in call*, *up and out put* ed *up and in put*)
4. Opzioni a barriera di tipo *reverse* (*up and out call*, *up and in call*, *down and out put* e *down and in put*).

A ciascuna di queste tipologie sarà dedicato un apposito capitolo. In ciascuno di questi, dopo un preliminare richiamo alla struttura contrattuale delle opzioni (e relativo *payoff*), sarà affrontata nel dettaglio la problematica relativa al *pricing* delle stesse (derivazione delle formule di valutazione), per poi arrivare a proporre al lettore un accurato studio del comportamento dell'opzione e dei relativi indici di sensibilità in funzione delle variabili fondamentali (prezzo del sottostante, volatilità, vita residua e tasso di interesse); concluderà il capitolo un breve studio delle possibilità di copertura, dinamica o statica, dei rischi connessi all'utilizzo di tali sofisticati derivati.

Concluderà il nostro lavoro la presentazione dei risultati ottenuti, a mezzo di simulazioni numeriche su *computer*, nel raffronto diretto tra tecniche di copertura dinamiche e tecniche statiche applicate alle opzioni sopra citate, in presenza di diversi scenari (*drift* nullo, *drift* non nullo, volatilità variabile, etc).

Capitolo 3 - Opzioni binarie di tipo europeo

Come abbiamo avuto modo di spiegare nel capitolo precedente esistono diversi tipi di opzioni binarie, tra cui le due tipologie fondamentali sono chiaramente le *binary* di tipo europeo e quelle di tipo americano. Le *binary* sono dette anche *digital* o *bet option*. In questo capitolo approfondiremo l'analisi delle opzioni binarie *cash or nothing* di tipo europeo, mentre quelle americane saranno l'oggetto d'analisi delle pagine successive. Senza per questo voler anticipare il contenuto dei capitoli seguenti, è possibile sin d'ora mettere in evidenza come le europee siano senz'altro più agevolmente trattabili rispetto alle cugine "d'oltreoceano".

3.1 Definizione e *payoff*

Le opzioni binarie *cash or nothing* pagano una somma fissa al verificarsi di una determinata condizione. Sono chiamate opzioni binarie in quanto pagano o tutto o niente (allo stesso modo con cui il codice binario è composto solo dalle cifre 0 o 1), senza mezze misure e senza premi di consolazione (non per niente si chiamano anche *cash or nothing call* e *put*).

L'opzione binaria di tipo europeo è una scommessa sul livello del prezzo del sottostante a scadenza, in questi termini: l'opzione binaria *call* (*put*) paga una somma determinata X , se il prezzo finale a scadenza S_T è superiore (inferiore) ad un certo livello prefissato K , detto *strike price*, nulla in caso contrario. Riassumendo l'opzione binaria europea di tipo *call* paga:

$$\begin{cases} 0 & \text{se } S_T \leq K \\ X & \text{se } S_T > K \end{cases}$$

Mentre l'opzione *put*:

$$\begin{cases} 0 & \text{se } S_T > K \\ X & \text{se } S_T \leq K \end{cases}$$

Alternativamente è possibile utilizzare la funzione di Heaviside " $H(\cdot)$ " (assume valore pari a uno se l'argomento è positivo, valore zero se l'argomento è negativo o nullo) e scrivere pertanto:

$$C_\omega = X H(S_T - K).$$

A questo punto risulta alquanto agevole tracciare un grafico di tale *payoff*:

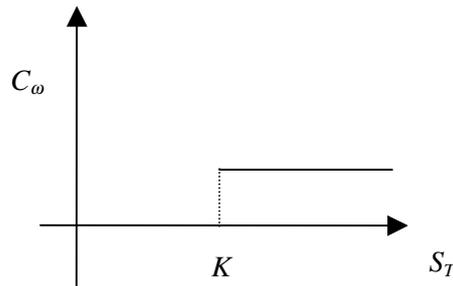


Figura 1 - *Payoff* di una *binary call*

3.2 Il prezzo di un'opzione binaria di tipo europeo

La valutazione di un'opzione binaria *call* di tipo europeo è di una linearità stupefacente, se si utilizza il seguente ragionamento¹. Un'opzione binaria *call* è strutturata esattamente come una *vanilla call* modificata in maniera tale che, in caso di esercizio ($S_T > K$), non offra a chi la esercita la consegna di alcun titolo, e tuttavia, invece di esigere il pagamento dello *strike* K , offra al contrario a chi esercita il pagamento di una somma X . Ciò che dobbiamo fare è semplicemente considerare la formula di Black e Scholes per la valutazione delle *vanilla option* ed effettuare le seguenti sostituzioni : $S=0$ e $-K=X$ (sostituzioni da intendersi in senso "economico", e non banalmente algebrico, poiché ad esempio sia K che X sono numeri positivi). Otteniamo in questo modo:

$$V = e^{-rt} X N(\phi d_2),$$

dove $\phi = 1$ per le *call*, $\phi = -1$ per le *put*; dove inoltre $d_2 = \left[\ln(S/K) + (r - g - \sigma^2/2)t \right] / (\sigma\sqrt{t})$, in cui g rappresenta il tasso istantaneo con cui il sottostante paga dividendi².

Qualora questa comoda esposizione intuitiva non soddisfacesse il lettore, si può utilizzare l'approccio probabilistico per una più rigorosa derivazione della formula sopra presentata. Prima di tutto la probabilità di esercizio può essere così calcolata³:

$$\begin{aligned} P[\phi S_\omega > \phi K] &= P[\phi x > \phi \ln(K/S)] = P[\phi u > \phi (\ln(K/S) - \mu_x) / \sigma_x] = \\ &= P[\phi u > -\phi d_2] = N(\phi d_2), \end{aligned}$$

dove $x = \ln(S_T/S)$, $u = \frac{(x - \mu_x)}{\sigma_x}$ ovvero nient'altro che la variabile x standardizzata,

$\mu_x = (r - g - \sigma^2/2)t$ è la media con cui si distribuisce x (siamo in presenza delle solite ipotesi

¹ Si veda Rubinstein e Reiner (1991b).

² Si veda, a proposito dei dividendi, anche il secondo paragrafo del primo capitolo (pag 4-6).

³ Si veda anche Zhang (1997: 393).

circa il movimento dei prezzi), $\sigma_x = \sigma\sqrt{t}$ è la deviazione standard di x , mentre d_2 coincide con la definizione che ne abbiamo dato sopra. A questo punto, poiché, a scadenza, con probabilità *risk neutral* $N(d_2)$ la nostra opzione pagherà la somma X , mentre con probabilità $(1 - N(d_2))$ il *payoff* sarà nullo, abbiamo tutti gli elementi per valutare, in base all'approccio probabilistico, l'opzione nel seguente modo:

$$V = e^{-rt} [0 \cdot (1 - N(d_2)) + X \cdot N(d_2)] = e^{-rt} X N(d_2);$$

il risultato ottenuto corrisponde a quanto ci aspettavamo.

3.3 Caratteristiche generali delle *european digital option*

Prima di osservare come sia possibile implementare una efficace copertura statica attraverso l'uso di *vertical spread* e confrontare l'efficienza di tale soluzione con quella di un più tradizionale *Delta hedging*, è opportuno farsi un'idea più precisa delle caratteristiche peculiari delle binarie di tipo europeo. A tal fine può risultare vantaggioso studiare il grafico 2, il quale mette in relazione il valore dell'opzione con il prezzo del sottostante e la vita residua dell'opzione stessa. Le ipotesi ambientali (volatilità e tasso) e contrattuali (*strike* e *payoff*) alla base del grafico proposto sono le seguenti: $\sigma = 15\%$, $r = 5\%$, $K = 105$, $X = 100$.

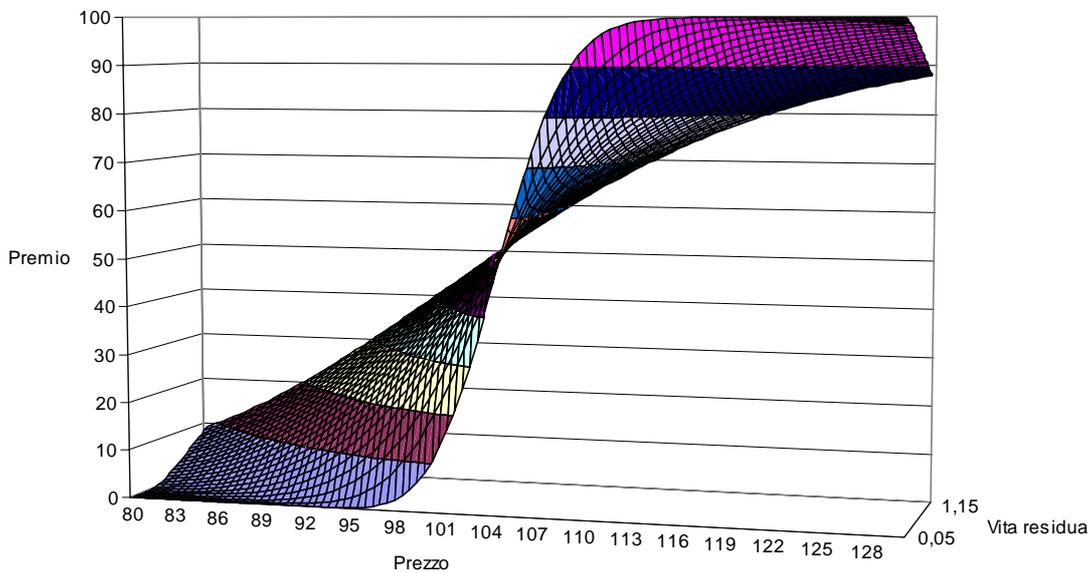


Figura 2 - Il premio di una *european digital* ($K=105$) in funzione del prezzo e della vita residua

Non è difficile notare come l'opzione, man mano che si avvicina la data di scadenza, tenda a diventare decisamente più instabile. In sostanza il passare del tempo accentua l'impennata che il *Delta* subisce in corrispondenza dello *strike*, nei cui dintorni il comportamento dell'opzione è decisamente brusco. Ciò è ovviamente dovuto alla natura "dicotomica" dell'opzione binaria che, come detto, paga o tutto o niente, senza mezze misure. Il passare del tempo rende il

comportamento dell'opzione più brusco per la banale ragione che diminuisce nettamente le probabilità che l'opzione passi dallo stato *out of the money* allo stato *in the money* o viceversa; la conseguenza è che un'opzione *out of the money* è assai probabile che rimanga tale, con ovvio detrimento del suo valore, mentre la considerazione speculare vale per l'opzione *in the money*. Al passaggio del tempo deve dunque risultare (per le *put* vale l'opposto):

$$V(t) < V(t_1) \quad \text{per } F_t > K,$$

$$V(t) > V(t_1) \quad \text{per } F_t < K;$$

dove V rappresenta il valore dell'opzione, K è lo *strike*, F_t è il prezzo corrente a termine, mentre t misura la vita residua dell'opzione (e chiaramente è $t_1 < t$). In effetti, partendo dalle medesime ipotesi alla base della costruzione del grafico 2 e prendendo come base di riferimento per esempio un prezzo spot di 125\$, il valore dell'opzione passa dai 91\$ circa in corrispondenza di una vita residua di nove mesi ai 98\$ riscontrabili a tre mesi dalla scadenza. Alle medesime condizioni, ma con uno spot di 90\$, l'opzione passa da un valore di 16\$ circa ad uno di soli 2,7\$. Il grafico della funzione *Delta* (figura 3) può aiutare a meglio comprendere il comportamento di una *digital* europea.

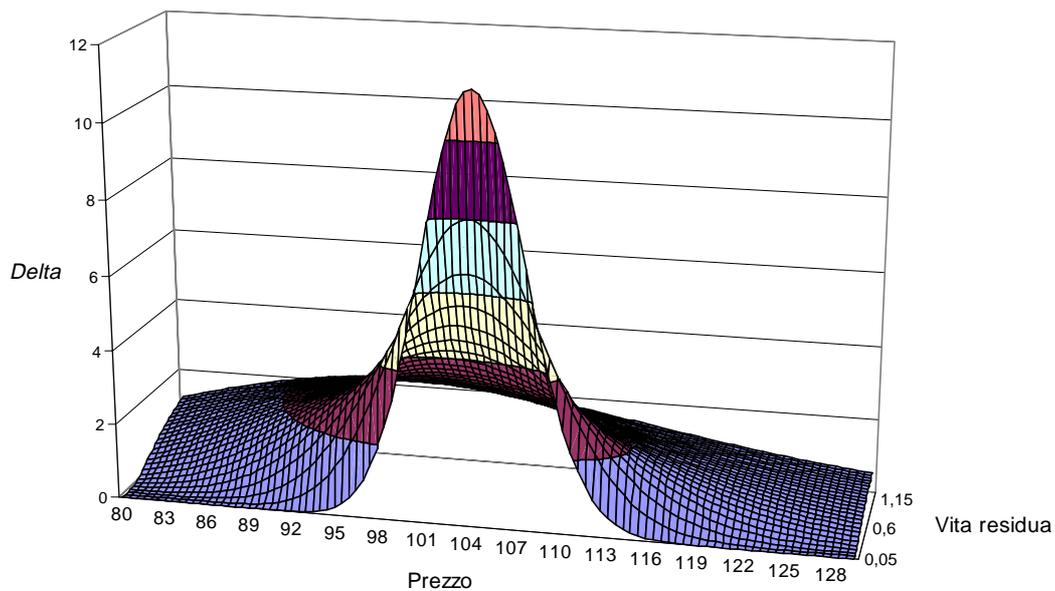


Figura 3 - *Delta* di una *european digital* ($K=105$) in funzione del prezzo e della vita residua

In accordo con le considerazioni svolte appena sopra, il *Delta* tende, col passare del tempo, a presentare un picco nella fascia di prezzo intorno allo *strike*. Infatti tende a diminuire per prezzi lontani dallo *strike* e ad aumentare vistosamente in corrispondenza dello stesso. Si pensi del resto cosa possa significare per le *chances* di esercitabilità finale di una *digital* anche solo un minimo movimento favorevole del sottostante quando il prezzo dovesse trovarsi poco al di sotto dello *strike* e la vita residua ammontasse a poche settimane. In effetti il *Delta*, in corrispondenza dello *strike*, al diminuire della vita residua da nove a tre mesi, passa (valgono le solite ipotesi circa condizioni contrattuali, volatilità e tasso) da 2,7 a 4,9 circa. Per prezzi lontani dallo *strike*, come detto, si verifica il fenomeno opposto: in corrispondenza ad esempio di uno spot di 125\$ il *Delta* passa da 0,67 (nove mesi di vita residua) a 0,19 (tre mesi a scadenza); per uno spot pari a 90\$ il *Delta* diminuisce da 2,1 a 0,9. Il grafico comunque non si limita a confermare quanto detto, ma presenta altresì una curiosità: la sua conformazione non è, come ci si potrebbe superficialmente aspettare, del tutto simmetrica intorno allo *strike*, ma presenta, per valori della

vita residua sufficientemente elevati, una tendenza a vedere il proprio asse di simmetria fissarsi in corrispondenza di valori del prezzo più bassi. Questa tendenza della funzione *Delta* a raggiungere il proprio apice (in presenza di una elevata vita residua) prima dello *strike*, si spiega con il *drift* positivo che guida i movimenti del prezzo del sottostante: esso aumenta in maniera significativa la probabilità che il sottostante raggiunga a scadenza valori superiori allo *strike* e ciò in misura tanto più incisiva quanto maggiore è la vita residua della *digital* (quanto maggiore è la vita residua dell'opzione, tanto maggiore è il tempo a disposizione del *drift* per agire sul prezzo). Tale aumento di probabilità è così forte da rendere meno sensibile il valore dell'opzione a variazioni favorevoli del sottostante già a partire da prezzi posti (momentaneamente) al di sotto dello *strike*. Infatti, posto $r = 5\%$ e $\tau = 9$ mesi (vita residua), il *Delta* dell'opzione raggiunge il suo apice per valori del prezzo pari a 100\$ (e qualcosa); passando ad un tasso del 10%, l'apice viene invece raggiunto per prezzi intorno ai 96,5\$ (dunque sensibilmente inferiori). Altro aspetto degno di nota è la perfetta somiglianza esistente tra la funzione *Delta* della *digital* e la funzione *Gamma* di una *vanilla* (il che poi implica evidentemente una coincidenza di andamento anche tra valore della *digital* e *Delta* di una *vanilla*, che non sarà sfuggita al lettore esperto).

Non rappresenterebbe operazione ardua l'offrire un'interpretazione matematica dell'analogia in questione: quello che tuttavia preme qui osservare è la conseguenza di una tale analogia sulle tipologie di rischio che ad esempio il *writer* si trova ad affrontare in sede di copertura. Si osservi a questo proposito l'andamento della funzione *Gamma* di una *digital* (figura 4).

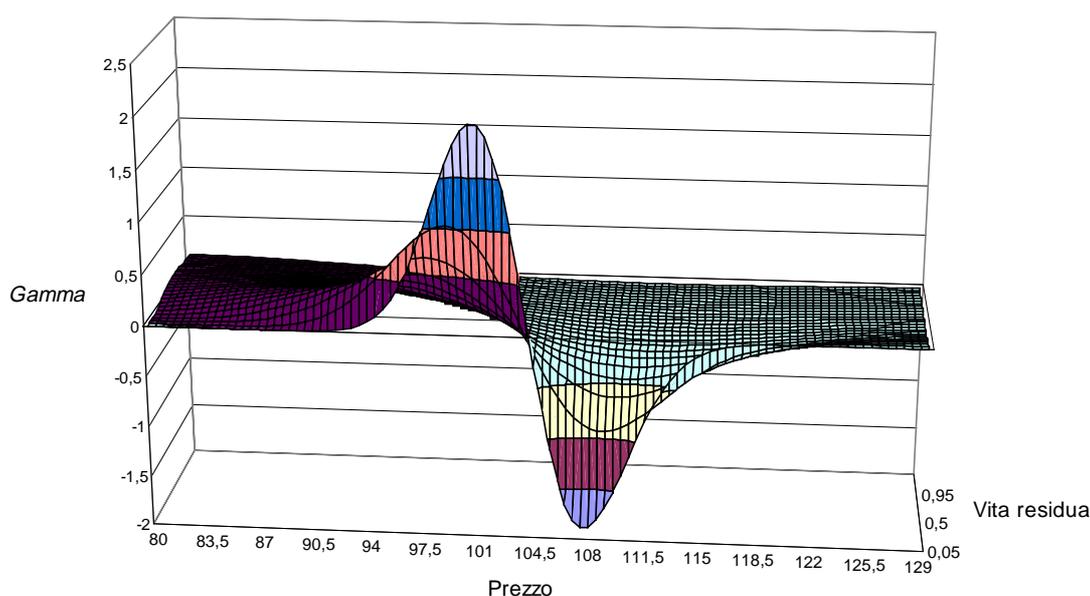


Figura 4 - Funzione *Gamma* di una *digital* europea ($K=105$) in funzione del prezzo e della vita residua

L'analogia sopra menzionata tra *Delta* della *digital* e *Gamma* della *vanilla* (coefficiente questo dotato evidentemente di un andamento meno regolare rispetto al *Delta* della medesima *vanilla*) spiega la maggiore variabilità presentata dal *Gamma* dell'esotica. Dalla figura 4 è facile arguire le caratteristiche di *risk reversal* (inversione del rischio) dell'opzione. Gli anglosassoni usano questo termine per indicare un repentino cambiamento di segno nella funzione *Gamma* in corrispondenza di un determinato livello del prezzo del sottostante. Tale caratteristica risulta particolarmente evidente nelle binarie man mano che ci si avvicina alla scadenza: per valori del prezzo inferiori allo *strike* l'opzione presenta *Gamma* positivo, per poi assumere un *Gamma* negativo quando il prezzo supera lo *strike* (vale ovviamente l'opposto per le *put*). Ad esempio, nel solo *range* di prezzo compreso tra 100 e 107\$, in presenza di una ridotta vita residua (un

paio di settimane), la funzione *Gamma* passa da 1,95 a -1,8 in soli 7\$ di variazione del sottostante. Sempre in corrispondenza dello *strike*, come del resto è facile dedurre osservando la figura 2, cambia anche il comportamento del valore dell'opzione in funzione del tempo (né del resto potrebbe essere altrimenti se si pensa alla consueta complementarità⁴ tra effetto *Theta* ed effetto *Gamma*): come si è già fatto notare, sotto lo *strike* infatti si manifesta un'erosione temporale del valore dell'opzione (*time decay*), mentre si verifica l'esatto opposto per valori del prezzo superiori allo *strike*. Dunque l'emittente l'opzione *digital* perde sull'effetto *Gamma* e guadagna sull'effetto *Theta* fintanto che l'opzione rimane *out of the money*, mentre la situazione si capovolge completamente quando l'opzione entra *in the money*. Chiaramente una tale caratteristica di inversione del rischio può creare qualche problema al *trader* che cercasse di coprire il rischio *Gamma* (dovuto alla non sempre puntuale compensazione tra effetto *Gamma* ed effetto *Theta*) utilizzando strumenti sprovvisti di una tale *feature*.

Quanto al coefficiente *Vega* (la derivata prima del premio rispetto alla volatilità del sottostante) il lettore potrà facilmente prevederne l'andamento analogo a quello del *Gamma*: la figura 5 conferma del resto l'attesa somiglianza con tale funzione. L'andamento sinusoidale della funzione *Vega* si spiega piuttosto facilmente: quando l'opzione è *out of the money* ogni aumento della volatilità del sottostante evidentemente non potrà che essere bene accetto, dal momento che andrà ad aumentare la probabilità che l'opzione ha di entrare *in the money*; al contrario quando l'opzione dovesse trovarsi già *in the money*, l'interesse del detentore è al contrario che la situazione rimanga "congelata", dal momento che la *binary* non potrebbe mai offrirgli più di quanto già non gli offra; la conseguenza è un *Vega* negativo (un aumento della volatilità aumenterebbe la probabilità dell'opzione di tornare o finire *out of the money*). Per quanto riguarda l'effetto della volatilità di partenza sul *Vega*, questo sarà chiaramente diverso a seconda del grado di vicinanza dello *spot* allo *strike*: per valori del prezzo lontani dallo *strike* una bassa volatilità di partenza implica una probabilità di cambiamento di "campo" (passaggio dallo stato *out of the money* a quello *in the money* o viceversa) estremamente bassa, e dunque anche una bassa sensibilità in termini assoluti del premio rispetto a variazioni della volatilità; al contrario, sempre in presenza di una bassa volatilità di partenza, un prezzo vicino allo *strike* implica una forte sensibilità della probabilità di "cambiamento di campo" a variazioni della volatilità che, in prossimità appunto dello *strike*, possono in effetti risultare determinanti: il risultato consiste in un *Vega* particolarmente elevato in termini assoluti. Chiaramente per elevate volatilità di partenza il ragionamento si inverte: per prezzi vicini allo *strike* la probabilità di cambiamento di campo è così elevata da risultare poco sensibile a variazioni ulteriori della volatilità, mentre ciò non avviene per prezzi sufficientemente lontani, in virtù dei quali (grazie anche alla volatilità di partenza sufficientemente alta) la medesima probabilità ha ancora margini sostanziosi di aumento.

⁴ In effetti è possibile dimostrare come l'impianto di valutazione "alla Black e Scholes", il quale presuppone la copertura della posizione in opzioni, implichi inevitabilmente (per variazioni infinitesime del tempo ed assumendo flussi monetari rigorosamente a scadenza) una vicendevole compensazione tra effetto *Gamma* ed effetto *Theta*.

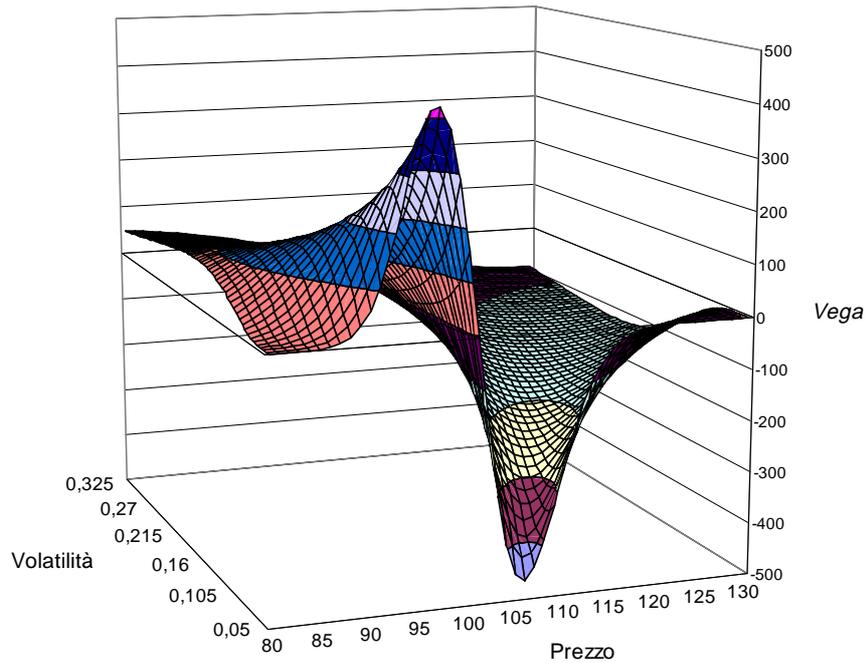


Figura 5 - Vega di una *digital call* europea ($K=105$) in funzione del prezzo e della volatilità di partenza

Le considerazioni svolte sin qui con riferimento a diversi livelli di volatilità (di partenza) sono evidentemente “riciclabili” per spiegare l’andamento del *Vega* in corrispondenza di diversi livelli della vita residua: del resto una bassa vita residua significa una bassa volatilità complessiva (considerata sull’arco della variazione complessiva del sottostante dall’inizio alla fine della vita dell’opzione) e viceversa.

Resta da esaminare (tra le greche degne di attenzione) il solo *Theta*, ovvero la derivata prima del premio rispetto al tempo (o meglio la vita residua dell’opzione). Esso misura la perdita o l’aumento di valore dell’opzione al passaggio del tempo. L’impianto classico di valutazione delle opzioni prevede una stretta complementarità tra tale greca ed il *Gamma* visto poc’anzi (in altre parole quel che si guadagna sul *Gamma* lo si deve perdere sul *Theta* e viceversa).

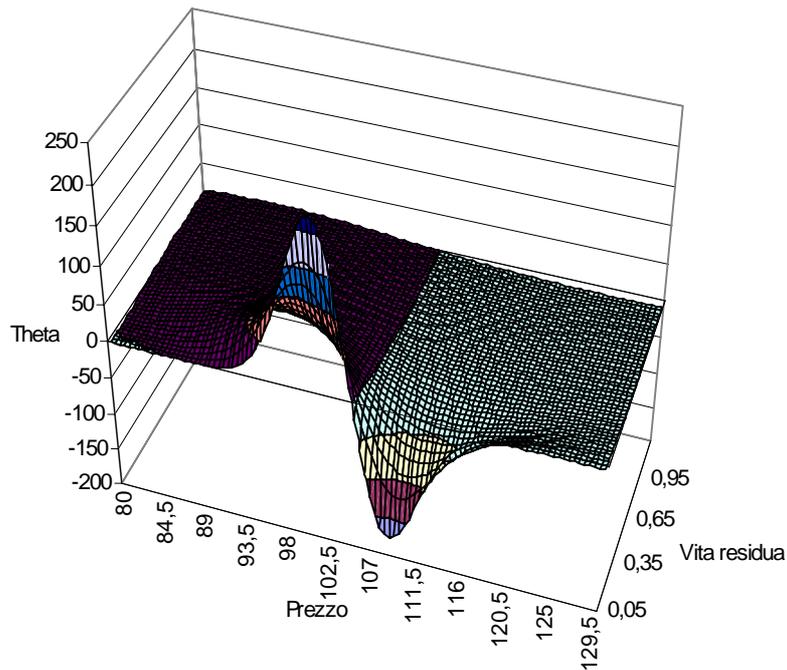


Figura 6 - *Theta* di una *digital call* europea ($K=105$) in funzione del prezzo e della vita residua

In effetti il lettore non mancherà di ravvisare nella figura 6, riportante l'andamento del *Theta* in funzione del prezzo del sottostante e della vita residua, una forte analogia con quanto visto in figura 4. Quando il *Gamma* raggiunge i massimi valori in termini assoluti, ecco inevitabilmente il *Theta* fare altrettanto. In sostanza l'opzione tende a perdere valore, al passaggio del tempo, per prezzi inferiori allo *strike* (quando l'*hedger*, lungo sulla posizione in opzioni, guadagna invece sull'effetto *Gamma*), e a guadagnarne invece per prezzi più alti (quando invece il medesimo *hedger* perde sull'effetto *Gamma*). Le ragioni di tale andamento sono fondamentalmente le stesse che abbiamo visto per il *Vega*. Del resto il fattore tempo è assai spesso, nella sua influenza sul comportamento dell'opzione, assimilabile al fattore volatilità.

3.4 Copertura tramite *dynamic hedging*

Come certamente il lettore saprà, il *dynamic hedging* di un'opzione, *vanilla* e non, consiste in sostanza nel mantenimento di una posizione (corta o lunga a seconda dei casi) di entità Δ (pari alla derivata prima del premio rispetto al prezzo del sottostante) nell'*underlying*. Ciò consente, per movimenti del prezzo contenuti, di neutralizzare il cosiddetto "rischio direzionale".

Purtroppo l'*hedger* che utilizzasse una tale tecnica non può essere del tutto sicuro di non riportare perdite anche significative. Effetto *Gamma* ed effetto *Theta* (ovvero perdite e guadagni derivanti rispettivamente dalla curvatura del profilo del premio dell'opzione e dal *time decay* del valore della stessa) si compensano nella teoria del modello astratto ma non sempre (esattamente quasi mai) nella pratica di mercato di ogni giorno. Tale divergenza si spiega in particolare con l'inevitabile "discretizzazione" cui deve soggiacere la copertura in condizioni reali: diventa impossibile dare luogo a quel ricalibramento continuo della posizione nel sottostante che invece il modello di *pricing* postula. A ciò si aggiunge la tendenza dei prezzi reali a muoversi non proprio esattamente secondo i dettami del moto Browniano, ma più spesso secondo particolari *trend* o schemi ricorrenti.

Ovviamente un *Gamma* di dimensioni non trascurabili tende ad aggravare notevolmente la situazione. Le *digital*, a causa della discontinuità del loro *payoff*, possono presentare, in casi estremi (leggasi: a breve tempo dalla scadenza), *Gamma* tendenzialmente infiniti. In casi del genere un utilizzo pedissequo e sistematico della tecnica di *delta hedging* può portare a sgradevoli sorprese.

Abbiamo effettuato una serie di mille simulazioni numeriche relative alla copertura tradizionale (*delta hedging*) di una *cash or nothing call* (in vendita) con *strike* 100, sottostante di partenza 99, vita residua di un anno (la posizione in opzioni verrà mantenuta e coperta rigorosamente fino a scadenza con ricalibramenti giornalieri della posizione nel sottostante), volatilità annua dell'*underlying* pari al 20%, tasso senza rischio dell'8% e tasso pagato sui dividendi pari al 5%. Il risultato medio ottenuto è stato una perdita pari allo 0,655% del premio iniziale. Si tratta di una perdita di entità trascurabile (soprattutto se si tiene conto del fatto che l'opzione è stata venduta al solo valore teorico, calcolato per mezzo delle formule già esaminate basate ovviamente su un impianto di valutazione alla Black e Scholes).

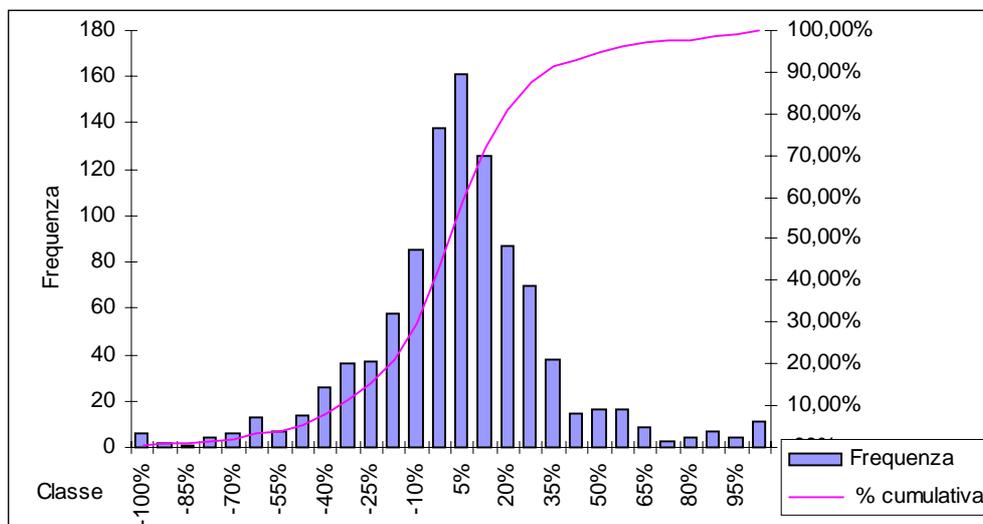


Figura 7 - Dispersione dei risultati da *dynamic hedging* di una *cash or nothing call*

Ben più preoccupante è semmai la dispersione (deviazione standard) di tale risultato, fissata intorno al 20%, ovvero quattro volte la dispersione rilevabile (in condizioni sostanzialmente analoghe) per una più semplice *vanilla*. Se poi volessimo più realisticamente ipotizzare la presenza di una volatilità variabile (in contrasto dunque con l'impianto classico di valutazione delle opzioni) la deviazione standard del risultato arriverebbe facilmente a superare il 30%. Il grafico rappresentato in figura 7 rappresenta la dispersione sopra menzionata (ottenuta cioè per il caso di volatilità variabile). Come si vede, in casi particolarmente sfortunati le perdite possono arrivare al 100% del premio ed oltre.

In definitiva, come accennato, un utilizzo senza correttivi delle tecniche tradizionali di *hedging* non è perseguibile, a meno di non volersi assumere rischi non trascurabili. Se proprio si vuole ricorrere al *delta hedging* è opportuno rinunciare quantomeno ad un suo impiego a breve tempo dalla scadenza, assumendo piuttosto un cosciente rischio direzionale.

3.5 Copertura statica tramite *vertical spread*

La caratteristica di *risk reversal* delle opzioni binarie europee rende particolarmente adatta per tali strumenti finanziari la copertura attuata tramite strutture di natura analoga.

Supponiamo di dover coprire una *digital* con *strike* pari a 100 e che, qualora il prezzo finale risulti superiore allo *strike*, paghi la somma di 100\$. A questo fine intendiamo utilizzare i *vertical spread*. Un esempio di *vertical spread* è la combinazione di opzioni formata da una *call* in acquisto e da una *call* in vendita, con quest'ultima contraddistinta da uno *strike* più alto di quella in acquisto.

Supponiamo allora l'acquisto di una *vanilla call* con *strike* pari 100, nonché la vendita di una medesima *vanilla*, ma con *strike* pari a 100,01 (la ragione per cui gli *strike* sono stati scelti così vicini verrà chiarita in seguito).

A questo punto tracciamo su di uno stesso grafico i *payoff* (netti dei premi) delle due *vanilla*:

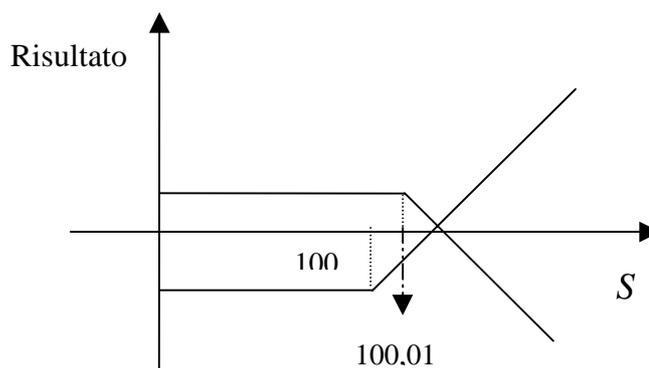


Figura 8 - *Payoff* delle singole componenti di un *vertical call spread*

Ovviamente nel grafico le proporzioni tra le parti sono state volutamente alterate per rendere il tutto più leggibile. Ad ogni modo per ottenere il *payoff* (netto dei premi) del *vertical spread* (*call*) è sufficiente sommare verticalmente le curve appena sopra tracciate:

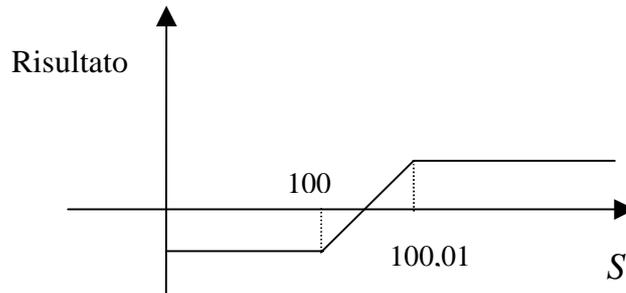


Figura 9 - Payoff di un call spread

Depurando il grafico dell'incidenza dei premi otteniamo il *payoff* lordo del *vertical spread*:

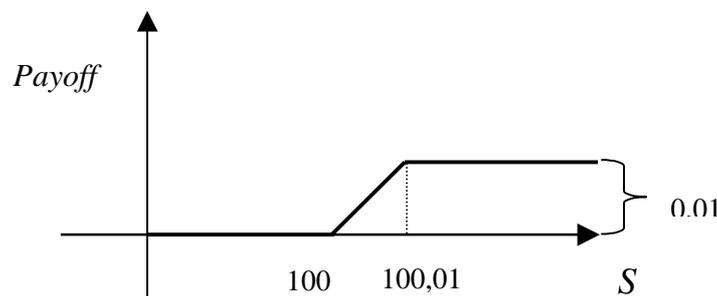


Figura 10 - Payoff lordo di un vertical call spread

La struttura del *payoff* del *vertical spread* è analoga a quella della *digital*, e questo è tanto più vero quanto più vicini vengono scelti gli *strike*. Come vedremo in seguito una diminuzione della distanza tra gli *strike* porta ad un aumento del numero degli *spread* da utilizzare nella copertura: la somma verticale dei *payoff* aumenta la pendenza del tratto inclinato positivamente e rende dunque il *payoff* complessivo molto più simile al *payoff* della *digital*, con conseguente maggiore efficienza della copertura. In effetti la differenza fondamentale tra uno *spread* ed una *digital* sta nel fatto che, mentre la *digital* paga tutto il pagabile anche se il prezzo finale è superiore allo *strike* di una quantità infinitesima, il *vertical spread*, al contrario, paga una somma proporzionale alla misura con cui il prezzo finale risulta superiore al primo *strike* (quello della *vanilla* in acquisto), a meno che, naturalmente, il prezzo finale non superi anche il secondo *strike* (quello della *vanilla* in vendita). Del resto ciò è evidente se si fa caso all'inclinazione positiva del grafico dello *spread* per valori di S compresi tra i due *strike*. Nell'ultima figura riportata si è messo in evidenza il guadagno che la struttura offre nel passaggio da un prezzo inferiore o pari al primo *strike* ad un prezzo pari o superiore al secondo: tale guadagno (per un gioco di costruzione: l'angolazione delle "rampe" è di 45°) è esattamente pari alla differenza tra gli *strike*. Per compensare i 100\$ offerti, in caso favorevole, dalla *digital*, occorrerà quindi assumere una posizione opposta per un ammontare di 10000 unità di *vertical spread*: infatti ogni *spread* offre un *payoff* (che noi pagheremo avendo venduto gli *spread*) pari a 0,01\$ (in caso di prezzo superiore anche al secondo *strike*), ma siccome la *digital* paga ben 100\$ in caso di prezzo finale superiore allo *strike*, evidentemente dovremo vendere $100/0,01=10000$ *spread*. In termini formali dunque:

$$\text{numero di spread} = \frac{X}{K_2 - K_1},$$

dove X è il *payoff* offerto in caso favorevole dalla *digital*, mentre K_1 e K_2 rappresentano il primo ed il secondo (più alto) *strike* rispettivamente.

- ◆ Ritornando per un attimo alla questione della vicinanza tra gli strike, occorre ricordare che esistono limiti ben precisi nella possibilità di sceglierli il più vicini possibile, se non altro per l'esistenza di una differenza minima di prezzo, il tick⁵. Essa rappresenta per l'appunto quella quantità minima nella cui misura due prezzi devono differenziarsi (a causa dei regolamenti o della prassi dei mercati). In altre parole un prezzo può essere superiore od inferiore al precedente per una quantità non inferiore al tick, che, nel nostro esempio, abbiamo assunto pari a 0,01. Per le opzioni quotate in borsa la distanza tra due strike contigui è di solito ben superiore ad un tick. Esistono inoltre regole atte ad impedire l'aggiramento della norma: non è infatti possibile acquistare ad esempio dallo stesso operatore la stessa attività, in parte pagandola 100,01 ed in parte 100,00, ottenendo quindi un prezzo intermedio illegale.

Nel prossimo paragrafo ci occuperemo dei rapporti esistenti tra la forma di riproduzione sintetica della *digital* appena mostrata (il *vertical spread* con *strike* tendenti a coincidere) e la *digital* stessa, in presenza di un fenomeno molto particolare detto *skew*. Nell'ultimo capitolo (insieme alle altre soluzioni per le altre tipologie di opzioni) confronteremo finalmente la soluzione "statica" appena esposta con quella "dinamica" (ottenuta attraverso il *Delta hedging*) e cercheremo di stabilire, se possibile, quale delle due risulti, a conti fatti, la più efficiente e precisa.

3.6 Il caso della presenza di *skew*

In questo paragrafo cercheremo di chiarire cosa determina, ai fini della valutazione delle *digital*, la presenza di un fenomeno detto *skew*, sostantivo usato dagli anglosassoni per indicare una "asimmetria" nelle volatilità implicite nelle valutazioni di opzioni con *strike* diversi.

Supponiamo di dover replicare una *digital* con *strike* pari a 100\$, scadenza di qui a tre mesi, e che, in caso favorevole, paghi una somma pari a 100\$ (inoltre assumiamo per semplicità tasso d'interesse nullo e volatilità pari a 15,7%). Il valore di questa opzione calcolato secondo il modello sopra esposto è 49,6\$. Supponiamo di utilizzare per la replica del *payoff* della *digital* 100 *vertical spreads* con *strike* 99,50 e 100,50 (rispettivamente per il *call* in acquisto e per quello in vendita), e facciamo l'ipotesi che, in questo mercato, i movimenti del prezzo abbiano un "passo" minimo pari ad 1\$, anche perché altrimenti, con gli *strike* che abbiamo scelto, rischieremo uno sgradevole "buco" nella copertura/replica. In condizioni normali (impossibilità di arbitraggi) il costo della replica e quello teorico della *digital* dovrebbero circa equivalersi. In effetti, per una perfetta coincidenza tra i due valori, la differenza tra gli *strike* delle opzioni componenti lo *spread* dovrebbe tendere a zero e, di conseguenza, il numero dei *vertical spread* dovrebbe essere tendenzialmente infinito. Ipotizzando, per semplicità, di poter prescindere da questo problema, resta tuttavia quello dell'eventuale presenza di *skew*. Supponiamo infatti che, ad esempio, il *vanilla call* con *strike* pari a 99,50\$ sia dotato di una volatilità implicita superiore di un punto percentuale rispetto a quella della 100,50 *call* (*skew* negativo). In questo caso, evidentemente, la costruzione del *vertical spread* risulterà più onerosa ed il prezzo della *digital*, per mantenere l'equivalenza, dovrà salire fino a raggiungere i 69\$.

Nell'esempio appena illustrato naturalmente si è un po' calcato la mano allo scopo di rendere più evidente il problema, anche se, in certe condizioni, ad esempio in un mercato con aspettative al ribasso in un contesto fortemente ansioso, questo scenario non è più così surreale.

In base a quanto visto possiamo tentare un approccio al *pricing* delle *digital* che, basato sul costo di riproduzione attraverso *spread*, possa tenere conto anche della presenza eventuale di *skew*. Posto K lo *strike* della *digital*, $C(x)$ la valutazione di una *vanilla call* con *strike* x , ed h la distanza tra gli *strike* delle due *vanilla* che compongono lo *spread*, possiamo quindi esprimere il valore di una *digital* (che in caso favorevole paghi 1\$) nel seguente modo⁶:

⁵ Si veda anche Taleb (1997: 277).

⁶ Si veda Taleb (1997: 279-281).

$$V = - \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{C(K+h) - C(K)}{h} \right).$$

In questa formula il numeratore della frazione al secondo membro esprime il costo di riproduzione di un *vertical spread*, mentre il fattore moltiplicativo $(1/h)$ serve per tenere conto del numero di *spread* necessario per replicare perfettamente la *digital* (che come detto paga 1\$: se pagasse la somma generica X il fattore moltiplicativo sarebbe evidentemente (X/h)). Il secondo membro dell'equazione può essere anche visto come la derivata (cambiata di segno) del valore di una *vanilla call* rispetto allo *strike*. Per valori di h sufficientemente elevati il risultato offerto dalla formula coincide con il valore dell'opzione calcolato con il più tradizionale metodo alla Black e Scholes. D'altra parte, in presenza di *skew*, potremmo modificare la formula appena vista nel seguente modo⁷:

$$V_s = - \frac{\partial C}{\partial K} - \frac{\partial C}{\partial \sigma} \left(\frac{\delta \sigma}{\delta K} \right) \delta K.$$

In effetti $\partial C / \partial K$ è, come sopra ricordato, solo un altro modo per scrivere la formula precedente senza *skew* (V), $\partial C / \partial \sigma$ è il *vega* della *vanilla* (la sensibilità del valore del *call* a variazioni della volatilità), mentre $\delta \sigma / \delta K$ misura l'effetto *skew*, ovvero di quanto varia la volatilità implicita al variare dello *strike* (δK è la differenza tra gli *strike* delle due *vanilla* che costituiscono lo *spread*): in altre parole il secondo addendo rappresenterebbe un fattore di correzione volto a quantificare l'effetto sul costo della prima *vanilla* (quella in acquisto) di una volatilità implicita crescente con il passaggio dal secondo *strike* (quello dell'opzione in vendita) al primo o, alternativamente, in caso di volatilità crescente con il passaggio dal primo al secondo *strike*, l'effetto di tale *skew* sul ricavato dalla vendita della seconda *vanilla* (in teoria dovremmo dunque usare due *vega* diversi a seconda del tipo di *skew*, ma, data la vicinanza tra i due *strike*, possiamo utilizzarne uno solo approssimato per entrambi i casi).

Un esempio può essere utile in vista di un utilizzo concreto della formula proposta.

Immaginiamo di avere a che fare con una *digital* a tre mesi con *strike* pari a 100\$; supponiamo inoltre che, nel passaggio da uno *strike* di 99,50\$ ad uno di 100,50\$ (gli *strike* dello *spread*), la volatilità implicita aumenti di 0,5 unità: l'effetto *skew* sarebbe dunque pari a $0,5/1=0,5$. Il prezzo *spot* è pari a 100\$, mentre il *vega* di un *call at the money* a tre mesi dalla scadenza è pari a 0,190. Il prezzo (approssimato) della *digital* sarà dunque:

$$V_s = 0,496 \text{ (il valore alla Black e Scholes)} - 0,19 \times 0,5 \times 1 = 0,401.$$

Il prezzo risulta evidentemente inferiore a quello offerto dalla formula tradizionale per la seguente ragione (implicita in quanto già esposto): uno *skew* positivo (volatilità implicita crescente con gli *strike*) implica un premio relativo alla seconda *vanilla* (quella in vendita) più alto e dunque un minore esborso per la costruzione dello *spread* che replica la *digital*.

3.7 Metodologie di *trading* e di copertura dinamica: conclusioni.

In base a quanto detto finora, le possibilità di una copertura credibile sembrerebbero restringersi a due soli casi: il *dynamic hedging* attraverso operazioni sul sottostante e lo *static hedging*

⁷ Ancora, si veda, con le opportune modifiche, Taleb (1997: 281).

attraverso la replica del *payoff* della *digital* effettuata tramite *vertical spreads*. Lo *static hedging* delle *digital* europee è stato introdotto per aggirare un problema piuttosto grave insito nell'applicazione del tradizionale *Delta hedging* alle *digital*: il rischio *Gamma*. Sotto il profilo puramente teorico, come già si è avuto modo di accennare, il *Gamma* piuttosto accentuato (il "piuttosto" è per la verità un eufemismo: in certe condizioni il *Gamma* della *digital* può assumere valori oltre dieci volte superiori a quelli raggiungibili da una *vanilla*) delle *digital* non dovrebbe rappresentare un problema: dovrebbe infatti essere completamente bilanciato dall'effetto *Theta*, ovvero dal *time decay* dell'opzione (che nel caso delle *digital*, soprattutto appunto in prossimità della scadenza, è in grado, al di sotto dello *strike*, di "spolparsi" rapidamente il valore dell'opzione, e di fare l'esatto opposto al di sopra dello stesso). In realtà tuttavia tale argomentazione regge completamente solo in condizioni ideali: in presenza di riassetamenti non continui del *Delta* da parte del *trader* ed in presenza di *trend* (al rialzo o al ribasso) più o meno diffusi (si tratta peraltro di condizioni facilmente riscontrabili sul mercato) la posizione dell'operatore che si copra sul sottostante diventa assai meno tranquilla. Come ben sappiamo infatti l'effetto *Gamma*, al di sotto dello *strike*, gioca già a sfavore del *writer*, ma può essere esasperato da una mancanza di tempestività nel ricalibrare il *Delta*, specialmente quando il prezzo tende a muoversi appunto secondo *trend* più o meno prolungati (contravvenendo quindi alle ipotesi di fondo circa il movimento casuale dei prezzi che stanno alla base del *pricing* alla Black e Scholes).

Tuttavia la soluzione al problema rappresentato dal rischio *Gamma* non è offerta soltanto da un contesto di copertura statica: esiste infatti una terza possibilità definibile genericamente di *trading* probabilistico. Tale metodologia consiste in sostanza nel trattare le opzioni *digital* come fossero delle vere e proprie scommesse sul valore futuro del prezzo: il *trader* si costruirebbe un portafoglio di numerose *digital* diverse ed agirebbe da vero e proprio *bookmaker*; chiaramente, agendo da *bookmaker*, cercherebbe di raccogliere scommesse di segno opposto (che si compensano tra loro), tollerando lievi differenze tra gli *strike* delle posizioni contrapposte. Per fare un prezzo sulle scommesse aperte (non bilanciate) utilizzerebbe, nelle proprie previsioni circa il prezzo futuro, non la distribuzione *risk-neutral*, che presupporrebbe la copertura delle opzioni, bensì una propria distribuzione soggettiva di probabilità.

Questo approccio alla gestione delle opzioni *digital* risulterebbe particolarmente appropriato soprattutto in prossimità della scadenza delle opzioni, quando cioè la copertura dinamica dei derivati, complice l'intensificarsi del rischio *Gamma*, non offrisse sufficienti garanzie di risultati stabili (e possibilmente non negativi).

Capitolo 4 - Opzioni binarie di tipo americano

In questo capitolo oltre a trattare l'utilizzo concreto delle *digital* americane e quindi le difficoltà concrete riscontrabili nella loro copertura si cercherà di offrire anche una spiegazione il più esauriente possibile dell'impianto di valutazione delle stesse. La rilevanza che, in termini di spazio, verrà riconosciuta in questo capitolo all'aspetto *pricing* è dovuta principalmente alla parentela che accomuna le *digital* americane alle opzioni barriera, oggetto d'analisi dei capitoli seguenti. Tale parentela si sostanzia nella presenza di una barriera di prezzo (che non va confusa con lo *strike price* delle binarie europee) rilevante ai fini del *payoff* durante tutto l'arco di vita dell'opzione: è esattamente questa caratteristica ad avvicinare le *digital* americane alle opzioni barriera in misura più convincente che non alle binarie europee. Non è dunque un caso il fatto che alla base della valutazione tanto delle *barrier options* quanto delle binarie americane ci sia la medesima funzione di densità probabilistica proposta nel 1965 da Cox e Miller.

Cercheremo in questo capitolo di offrire una panoramica approfondita circa modalità e difficoltà inerenti alla copertura di tali binarie. Già in precedenza si è avuto modo di anticipare l'indocilità presentata da questo tipo di opzioni; si è anche rimarcato come, a questo riguardo, le americane si rivelino più pericolose delle cugine europee. La ragione di questa maggiore "problematicità" è da ricercarsi evidentemente nella caratteristica distintiva di tali binarie rispetto a quelle già esaminate (le europee): la caratteristica di "maturabilità" anticipata delle stesse.

4.1 Definizione e *payoff*

L'opzione binaria americana si differenzia, come già accennato, dalla *digital* europea per il semplice fatto che non richiede, per l'esercizio, un prezzo a scadenza maggiore o minore di un dato livello (*strike price*) ma si accontenta che venga toccato anche solo momentaneamente da parte del prezzo un determinato livello "barriera" in un qualsiasi momento precedente la scadenza.

Non è un caso quindi se tali binarie vengono anche definite *one touch* (un solo tocco) dagli anglosassoni: è sufficiente che il prezzo del sottostante "tocchi" in qualsiasi momento la barriera perché l'opzione (di qui la sua natura binaria) paghi una determinata somma di denaro. Tale somma potrà essere corrisposta immediatamente oppure a scadenza: nel primo caso si parla di una *one touch immediate binary*, nel secondo di una *one touch deferred binary*.

La prima tipologia è di più difficile valutazione rendendosi evidentemente necessaria l'individuazione di una distribuzione di probabilità che permetta il calcolo del tempo "medio" in cui (per l'appunto in media) dovrebbe verificarsi il fatidico "tocco": solo ciò rende possibile una corretta attualizzazione del *payoff* offerto dalla *digital*.

In termini più formali, posto pari ad H il livello di prezzo barriera, posta uguale a B la somma di denaro pagata dalla *digital* in caso di esercizio e definita la variabile M_t^T nel seguente modo (il prezzo massimo raggiunto in un intervallo di tempo):

$$M_t^{t^*} = \max\{S(s) \mid s \in [t, T]\},$$

dove $[t, T]$ rappresenta l'insieme di numeri reali destinati al *computo* del tempo dalla data t fino alla scadenza T (ovvero l'intervallo di tempo), siamo in grado di esprimere il *payoff* di una *digital call* americana in termini formali, affermando che l'opzione paga:

$$\begin{cases} 0 & \text{se } M_t^T < H \\ B & \text{se } M_t^T \geq H \end{cases}$$

Naturalmente una struttura analoga, *mutatis mutandis*, presentano le *digital put*. Nel prosieguo del lavoro chiameremo le *digital* americane con barriera posta al di sopra del prezzo del sottostante (poco fa denominate, in analogia con le europee, *digital call*) *up and in cash or nothing*, quelle con barriera inferiore *down and in cash or nothing*.

4.2 Pricing delle *digital* americane

Si è già avuto modo di ricordare come la valutazione delle binarie americane, al pari delle *barrier options*, richieda l'utilizzo di una particolare funzione di densità probabilistica messa a punto in Cox e Miller (1965). Tale funzione di densità consiste in una distribuzione dei prezzi a scadenza condizionata al mancato raggiungimento della barriera durante tutto l'arco della vita residua dell'opzione. In altri termini questa funzione di densità ci dice, per ogni livello di prezzo a scadenza inferiore (o superiore nel caso di una *put*) alla barriera, il grado di probabilità (la densità di probabilità) con cui il prezzo può raggiungere a scadenza quel dato livello senza mai toccare la barriera. Viceversa un prezzo a scadenza superiore, nel caso di una *call*, od inferiore, nel caso di una *put*, alla barriera, è raggiunto certamente con una traiettoria che attraversa la barriera. La funzione comunque non è propriamente riferita ai prezzi *tout-court* del sottostante, bensì ai logaritmi degli stessi (in verità i logaritmi del rapporto tra prezzo corrente e prezzo iniziale): ciò si rende necessario per via del fatto che sono i ritorni, calcolati come logaritmi dei prezzi a distribuirsi normalmente, e ciò in virtù del moto Browniano aritmetico da essi seguito, in contrapposizione con il moto geometrico dei prezzi *tout-court*, che conduce ad una distribuzione futura di tipo lognormale. In questa sede si cercherà di offrire una derivazione intuitiva della funzione ottenuta da Cox e Miller. Il linguaggio utilizzato a tal fine è un linguaggio preso a prestito dalla termodinamica: la ragione di tale scelta risiede nella maggiore evocatività che una particella fisica, da un punto di vista intuitivo, sicuramente possiede rispetto al logaritmo di un prezzo. Si consideri dunque una particella x che, muovendo da un livello (quota) di partenza definito pari a zero, effettui tale movimento (che considereremo solo su due dimensioni) secondo un moto Browniano

aritmetico senza *drift*. Si consideri inoltre una barriera superiore di livello pari ad h ed una particella y del medesimo tipo e moto di x , ma che muova da un livello di partenza pari a $2h$. Si prenda in esame il grafico seguente, rappresentante due possibili traiettorie, parzialmente sovrappontesi, delle particelle x e y :

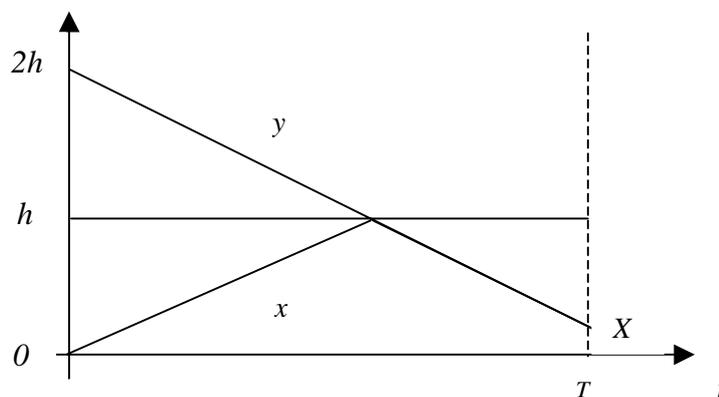


Figura 1 - Principio di riflessione

Il percorso seguito dalla particella x da 0 fino ad X (passando per la barriera) ha identica densità di probabilità di verificarsi del percorso seguito dalla particella y da $2h$ fino ad X ¹. La ragione di questo fenomeno è da ricercarsi nella conformazione delle due traiettorie. Prima che tali traiettorie si fondano, al raggiungimento della barriera, in una sola, esse presentano una medesima inclinazione (coefficiente angolare) in valore assoluto. Due traiettorie rettilinee che presentino una medesima “pendenza” in valore assoluto hanno la medesima “probabilità” di verificarsi (e a maggior ragione due traiettorie coincidenti, quali si presentano dopo il raggiungimento della barriera). Ciò è possibile in virtù della *natura simmetrica* della distribuzione normale, che, come detto, definisce i movimenti (senza *drift*) delle nostre due particelle (ovvero i logaritmi del prezzo del sottostante): in altre parole, un movimento verso l’alto o verso il basso della medesima entità hanno, in assenza di *drift*, la medesima “probabilità” (densità di probabilità) di verificarsi. Va da sé che traiettorie più “ripide” saranno meno “probabili”, poiché esse implicano (all’interno del nostro modello) la continua estrazione dalla distribuzione normale di valori posti sulle code della stessa e, pertanto, meno plausibili; in base al medesimo ragionamento la traiettoria più probabile è, in assenza di *drift*, quella orizzontale.

Una volta appurata la “isoprobabilità” delle due traiettorie tracciate nella figura 1 siamo in grado di generalizzare quanto detto, rilevando come, per ogni traiettoria che, partendo da quota zero e passando (ed eventualmente anche oltrepassando) per la barriera, raggiunga, al tempo T , la quota X , esista una seconda traiettoria che, partendo da quota $2h$, comportandosi in maniera del tutto simmetrica alla prima fino al raggiungimento della barriera e poi del tutto identica (coincidente) ad essa fino al conseguimento (al tempo T) della quota X , ha evidentemente la medesima identica probabilità (o meglio densità di probabilità) di verificarsi. In sostanza quindi, la probabilità (in questo caso, cumulando le densità, è possibile parlare in termini di probabilità vera e propria) che una particella (l’equivalente fisico del logaritmo del prezzo), partendo da quota zero, raggiunga al tempo T (a scadenza) una qualsiasi quota

¹ Per una trattazione estesa del principio di riflessione si veda anche Zhang (1997: 206-215) o Taleb (1997: 335-340).

inferiore alla barriera, passando nel suo tragitto per quest'ultima, è uguale alla probabilità che una medesima particella, partendo da quota $2h$, raggiunga al tempo T una quota inferiore ad h (la quota della barriera). Va poi, se del caso, chiarito che quanto detto vale ovviamente non solo per le semplici traiettorie lineari rappresentate in figura 1, ma per qualsiasi traiettoria che, partendo da 0, raggiunga a scadenza X toccando una o più volte la barriera: per ciascuna di tali traiettorie ne esiste una, simmetrica (fino al primo incrocio con la barriera) ed equiprobabile, che parte da quota $2h$. Al fine di dare al ragionamento sin qui svolto una veste più formale, consideriamo le due funzioni di densità relative alle due particelle, in presenza di *drift* nullo e di una deviazione standard pari a $\sigma\sqrt{t}$ (ciascuna di queste due distribuzioni dovrà dirci in sostanza la "probabilità" con cui la relativa particella raggiungerà a scadenza la quota X e non altre). La posizione a scadenza della particella x è distribuita secondo una normale con media pari alla posizione di partenza 0 e deviazione standard $\sigma\sqrt{t}$. Pertanto, per la particella x abbiamo:

$$f_x(X,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(X-0)^2}{\sigma^2 t}},$$

dove X è la quota finale raggiunta.

Per la particella y , che, al contrario di x , muove da quota $2h$ anziché zero, abbiamo analogamente:

$$f_y(X,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(X-2h)^2}{\sigma^2 t}},$$

dove X è definito come sopra. Naturalmente questa funzione misura anche la densità di probabilità dei percorsi che partono da 0 e arrivano a scadenza in X (al di qua della barriera) toccando la barriera.

A questo punto basta mettere insieme i due tasselli e, sostituendo i ritorni alle particelle, ottenere così la funzione di densità che ci dica, per ogni livello di prezzo (o meglio: logaritmo del prezzo) a scadenza inferiore alla barriera, la probabilità (da intendersi densità) che il prezzo vi arrivi partendo dal valore iniziale (che corrisponde al ritorno 0 in $t=0$) senza mai toccare la barriera:

$$p(X,t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}} \left\{ e^{-\frac{1}{2} \frac{(X-0)^2}{\sigma^2 t}} - e^{-\frac{1}{2} \frac{(X-2h)^2}{\sigma^2 t}} \right\} \text{ per } X < h,$$

dove h è evidentemente $\ln(H/S)$ (H è il livello della barriera in termini assoluti, ovvero non logaritmici).

Evidentemente $p(X,t)$ non è altro che $[f_x(X,t) - f_y(X,t)]$, ovvero la solita distribuzione normale diminuita, e quindi depurata, per ogni $X < h$, delle densità di probabilità relative a quei prezzi che, pur rivelandosi a scadenza inferiori ad h , hanno toccato la barriera durante l'arco di vita dell'opzione: infatti la densità di probabilità relativa alle particelle x che finiscano la loro corsa a quota X sotto la barriera dopo averla però raggiunta è esattamente identica, per il discorso di isoprobabilità sin qui svolto, alla densità relativa alle particelle y che, partendo da quota $2h$, raggiungano a scadenza la medesima quota X , scavalcando evidentemente una o più volte la barriera. La riproposizione del grafico 1, ottenuta sovrapponendo le due funzioni di densità menzionate, può aiutare la comprensione intuitiva del problema: è quanto offre la figura 2.

In essa è facile distinguere le due distribuzioni normali $f_x(X,t)$ ed $f_y(X,t)$ relative alle due particelle x e y . Ciascuna di queste distribuzioni ci dice, come del resto abbiamo già avuto modo di spiegare, la densità di probabilità con cui la particella x e la y rispettivamente finiscono a scadenza col raggiungere una determinata quota X e non altre (non a caso le due distribuzioni sono centrate, in assenza di *drift*, sulle traiettorie orizzontali).

Evidentemente per ottenere la distribuzione $p(X,t)$ (la terza distribuzione, orientata nel grafico, per ragioni di chiarezza, in senso opposto alle altre) dovremo sottrarre, per ogni valore X al di sotto della barriera, dalla prima distribuzione la seconda, in modo da depurare appunto la prima funzione di densità dalle densità relative alle traiettorie sbagliate, ovvero quelle che, pur portando la particella ad una quota finale $X < h$, prevedono un passaggio sulla barriera.

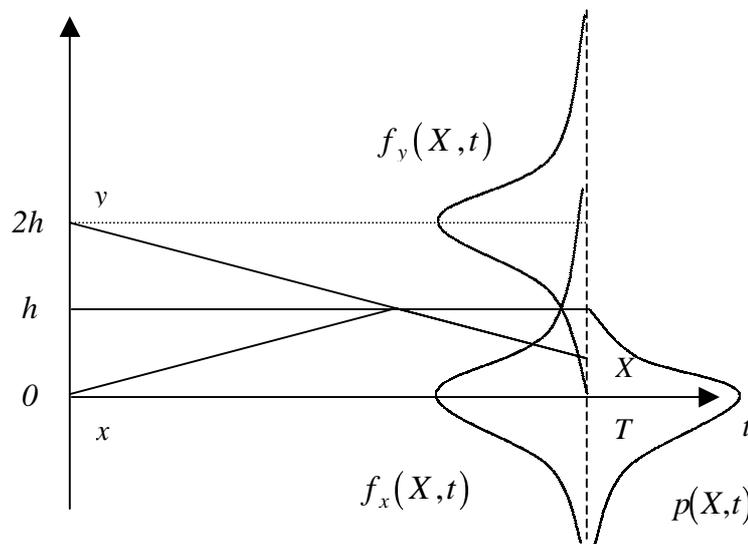


Figura 2 - Le distribuzioni di probabilità relative alle due particelle x e y

C'è però un elemento molto importante, relativo alla trasposizione del problema dallo scenario fisico (come fin qui presentato) a quello economico e che è stato trascurato nella funzione $p(X,t)$: tale elemento è la presenza del *drift*; come abbiamo già avuto modo di spiegare nel secondo capitolo il logaritmo del prezzo presenta sì un movimento di tipo Browniano aritmetico, ma presenta altresì un *drift* pari ad $a = (r - \sigma^2/2)$ (si noti come si sia già sostituito μ con il tasso senza rischio r , in accordo con l'approccio probabilistico). Cox e Miller hanno naturalmente tenuto conto di tale *drift* ed hanno trovato una versione generalizzata di $p(X,t)$, di cui evidentemente quella esaminata non è che un caso particolare (quello di $a = 0$). Tale funzione è:

$$p(X,t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}} \left\{ e^{-\frac{1(X-0-at)^2}{2\sigma^2 t}} - e^{2ha/\sigma^2} e^{-\frac{1(X-2h-at)^2}{2\sigma^2 t}} \right\} \text{ per } X < h.$$

Non è difficile constatare come tale generalizzazione non si sia limitata ad "aggiornare" le funzioni $f_x(X,t)$ ed $f_y(X,t)$, ma abbia anche introdotto un fattore e^{2ha/σ^2} del tutto inaspettato. In realtà per arrivare a comprendere la ragion d'essere di tale fattore è necessario

prima di tutto rendersi conto che, in presenza di *drift*, le due famose traiettorie illustrate in figura 1 cessano di essere isoprobabili. In particolare, in presenza di un *drift* positivo, la traiettoria della particella *y* diventa meno probabile di quella della controparte *x*: ciò si spiega con la resistenza (offerta dal *drift* positivo) che la particella *y* deve vincere per scendere fino a raggiungere la barriera a quota *h* (oltretutto la particella *x* va incontro ad un fenomeno opposto). Proprio per compensare tale fenomeno è necessario introdurre un fattore di correzione e^{2ha/σ^2} per la funzione di densità $f_y(X,t)$. In altre parole, per rendere le due traiettorie nuovamente isoprobabili (nel senso che vengono percorse idealmente da un medesimo numero medio di particelle) è necessario in un certo senso “barare” e far quindi finta che da quota $2h$ partano non una, bensì e^{2ha/σ^2} particelle *y*. Per non appesantire ulteriormente la trattazione non è il caso di dimostrare in questa sede perché tale fattore di correzione debba essere esattamente quello della distribuzione di Cox e Miller, tuttavia è possibile darne un’interpretazione alquanto intuitiva. Per esempio ci aspetteremmo che all’aumentare del *drift* relativo (il rapporto tra *drift* e varianza) aumenti anche il fattore di correzione: ed infatti in esso è presente il rapporto a/σ^2 . Lo stesso dicasi per l’altezza della barriera *h*: più alta è la barriera, maggiore è la distanza che le nostre particelle *y* devono percorrere controcorrente partendo da $2h$ e tanto più alto deve quindi risultare il fattore di correzione.

Estendendo quanto detto si può affermare che, qualora avessimo bisogno della funzione di densità relativa ai (logaritmi dei) soli prezzi che, pur concludendo il loro percorso sotto la barriera abbiano toccato la medesima almeno una volta prima della scadenza, non dovremmo far altro che prendere di peso la $f_y(X,t)$ ed applicarla all’intervallo $[-\infty, h]$.

A questo punto disponiamo degli strumenti necessari alla valutazione delle *deferred binary options*. A tal fine è prima di tutto necessario calcolare la probabilità complessiva che il prezzo, partendo da sotto la barriera, arrivi a toccarla almeno una volta prima della scadenza. Evidentemente tale probabilità non può che rappresentare la somma di due componenti: la probabilità che il prezzo termini la sua corsa al di sopra della barriera (il che ovviamente implica il perforamento della stessa) nonché la probabilità che il prezzo, pur raggiungendo a scadenza livelli inferiori (in termini logaritmici) ad *h*, abbia toccato tale livello almeno una volta prima della scadenza. In termini formali la probabilità d’esercizio è dunque pari a:

$$P = \int_h^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(X-at)^2}{\sigma^2 t}} dX + \int_{-\infty}^h \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{2ha/\sigma^2} e^{-\frac{1}{2} \frac{(X-2h-at)^2}{\sigma^2 t}} dX =$$

$$= N\left(\frac{-(h-at)}{\sigma\sqrt{t}}\right) + \left(\frac{H}{S}\right)^{2a/\sigma^2} N\left(\frac{h-2h-at}{\sigma\sqrt{t}}\right).$$

Evidentemente il valore della *digital*, posto uguale alla somma *B* il *payoff* offerto a scadenza dall’opzione in caso favorevole, può essere espresso nel seguente modo:

$$V = e^{-rt} B \cdot P + e^{-rt} 0 \cdot (1-P) = e^{-rt} B \cdot P,$$

ovvero², sostituendo ad *a* e ad *h* le formule corrispondenti:

² La formula ottenuta, consistentemente con Rubinstein (1991), è significativamente diversa da quella proposta da Zhang (1997: 401).

$$V_C = e^{-rt} B \left\{ N \left(\frac{\ln(S/H) + rt - \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}} \right) + \left(\frac{H}{S} \right)^{2 \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) / \sigma^2} N \left(\frac{\ln(S/H) - rt + \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}} \right) \right\},$$

(valore di una *up and in cash or nothing*).

Se invece di una *up and in* (o *call*, data l'assenza di *strike*) volessimo considerare una *down and in* (o *put*) non dovremmo far altro che scambiare gli intervalli di integrazione delle due funzioni di densità, ottenendo evidentemente:

$$V_P = e^{-rt} B \left\{ N \left(\frac{\ln(H/S) - rt + \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}} \right) + \left(\frac{H}{S} \right)^{2 \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) / \sigma^2} N \left(\frac{\ln(H/S) + rt - \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}} \right) \right\},$$

(valore di una *down and in cash or nothing*).

La differenza tra le due formule consiste semplicemente in un cambio di segno degli argomenti delle funzioni cumulate $N(\cdot)$.

Le *immediate binary options* e la densità di probabilità del "primo tocco"

Come si è precedentemente fatto notare le formule finora esaminate sono valide solo per quelle *digital americane* che prevedano il pagamento del *payoff* rigorosamente a scadenza (*deferred binary*). Chiaramente per arrivare ad una valutazione in forma chiusa delle *immediate binary options* si rende necessaria l'individuazione di una funzione di densità che, per ogni istante precedente la scadenza, ci dica la probabilità con cui in quell'istante la barriera può essere perforata. Tale funzione prende il nome di densità di *first passage time*. Per la derivazione della stessa si consideri ora la probabilità che la barriera (con $a > 0$) non venga mai perforata prima della scadenza (i passaggi matematici che portano a quanto segue sono piuttosto elementari e pertanto ci permettiamo di ometterli):

$$P' = N \left(\frac{h - at}{\sigma \sqrt{t}} \right) - e^{2ha/\sigma^2} N \left(\frac{-h - at}{\sigma \sqrt{t}} \right).$$

Differenziando tale funzione (in realtà avremmo potuto differenziare, con esiti, a parte il segno, identici, anche la probabilità di perforamento della barriera) rispetto alla vita residua e cambiando il segno del risultato (altrimenti la densità sarebbe negativa: all'aumento della vita residua la probabilità di non perforamento diminuisce, ed ovviamente cresce di pari misura quella di perforamento) otteniamo la distribuzione di densità che cercavamo³:

$$l(t) = \frac{h}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t^3}} e^{-\frac{(h-at)^2}{2\sigma^2 t}}.$$

La distribuzione $l(t)$ è detta anche "distribuzione Gaussiana inversa".

³ Si veda Rubinstein (1991).

Nel caso di una *down-barrier* (barriera posta al di sotto del prezzo corrente), ovvero nel caso di un $h < 0$, la distribuzione $l(t)$ diventa:

$$l(t) = \frac{-h}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t^3}} e^{-\frac{(h-at)^2}{2\sigma^2 t}}.$$

Il valore di una *immediate binary option* può essere visto come il valore atteso del valore attuale del *payoff* offerto dalla *digital* nel momento in cui il prezzo tocca la barriera; in termini formali dunque:

$$V = \int_0^t e^{-r\tau} B l(\tau) d\tau = B \int_0^t e^{-r\tau} l(\tau) d\tau.$$

La soluzione di questo integrale (per lo sviluppo dettagliato del quale si rinvia all'appendice matematica che conclude il capitolo) ci offre la seguente formula di valutazione in forma chiusa per le *immediate american digital*:

$$V = B \left(\frac{H}{S} \right)^{q_1} N[\theta Q_1] + B \left(\frac{H}{S} \right)^{q_{-1}} N[\theta Q_{-1}]$$

$$\text{dove } \psi = \sqrt{a^2 + 2\sigma^2 r},$$

$$Q_v = \frac{\ln(H/S) + vt\psi}{\sigma\sqrt{t}} \quad (v = +1 \text{ oppure } -1),$$

$$q_v = \frac{a + v\psi}{\sigma^2},$$

$\theta = -1$ per le *up-barrier* ($h > 0$), $\theta = +1$ per le *down-barrier* ($h < 0$).

Ovviamente una *immediate american cash or nothing digital* varrà sempre più della corrispondente *deferred* (a parità di condizioni): offre subito quello che la *deferred* offre solo a scadenza.

Ad esempio consideriamo il caso di una *immediate up and in* con *payoff* 100, barriera a quota 110, *spot* pari a 105, volatilità del 20%, tasso senza rischio del 5%, vita residua di tre mesi. Il suo valore è 66,15. La *deferred* corrispondente vale 65,58. La differenza comunque, come si vede, pur esistente, non è particolarmente rilevante.

4.3 Valore e sensibilità delle *digital* americane

Deferred up and in

Al di là delle notevoli differenze che, ai fini della valutazione, abbiamo avuto modo di riscontrare tra le *digital* europee e quelle americane, occorre riconoscere che questi due tipi di binarie presentano anche altre e più interessanti diversità. In primo luogo le *digital* americane, per le maggiori *chance* che offrono di ottenere un *payoff* positivo (non dimentichiamo che, mentre l'europea paga solo se a scadenza il prezzo è superiore/inferiore allo *strike*, l'americana al contrario paga anche nel caso in cui lo *strike/barriera* venga semplicemente "toccato" prima della scadenza), sono evidentemente anche più costose delle controparti europee (in genere addirittura il doppio). Un'altra interessante caratteristica delle *digital* americane rispetto alle europee consiste nella presenza di un *Vega* (derivata del prezzo rispetto alla volatilità) costantemente positivo. La cosa non deve stupire più che tanto: infatti, in un' *american digital*, il prezzo del sottostante non può mai superare la barriera ed entrare *in the money* senza causare l'estinzione (favorevolmente anticipata) dell'opzione. Ma per cominciare a farci un'idea più precisa del comportamento di una *digital* americana (*deferred binary*), osserviamo attentamente l'andamento del premio rappresentato in figura 3.

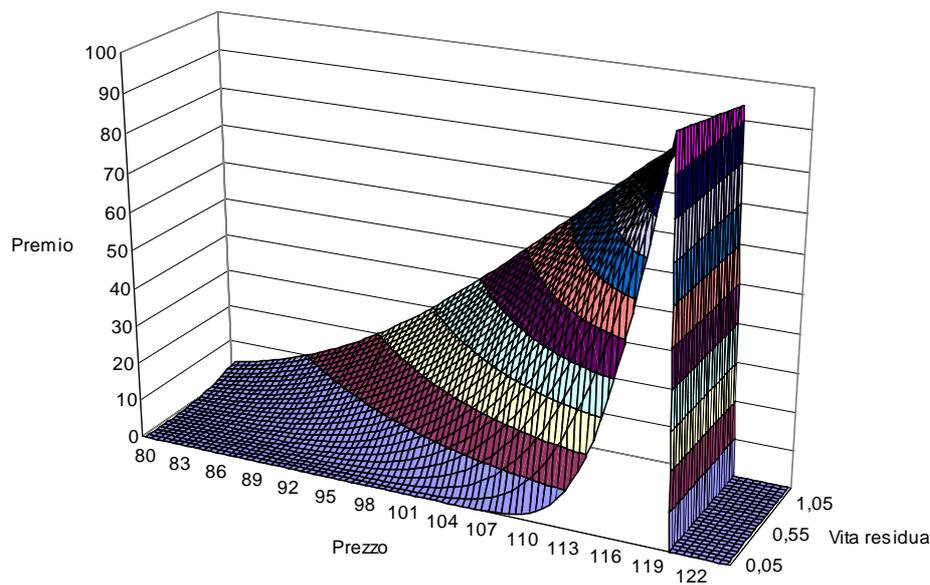


Figura 3 - Premio di una *deferred up and in* ($H=120$) in funzione del prezzo e della vita residua (tasso=5%)

Questo grafico è stato ottenuto ipotizzando la presenza di una *up-barrier* collocata in corrispondenza di un prezzo pari a 120\$ (inoltre: $\sigma = 15,7\%$, $r_f = 5\%$, $B = 100\%$). Il primo elemento che balza all'occhio confrontando tale grafico con quello relativo alle binarie europee è ovviamente la parete verticale che si innalza in corrispondenza della barriera: essa è banalmente dovuta all'estinzione che l'opzione incontra per prezzi pari o superiori alla

barriera stessa. D'altra parte la scelta di un livello pari a zero per il prezzo dell'opzione oltre la barriera ha natura puramente simbolica: non si può misurare ciò che non c'è. Un altro elemento di differenziazione, tra la *digital* americana e quella europea, che emerge abbastanza chiaramente dal grafico è la mancanza di quella caratteristica di *risk reversal* che al contrario contraddistingueva, in maniera appariscente, le *european binary*. In realtà, pur potendosi ragionevolmente sostenere che il *Gamma* delle *digital* americane è sostanzialmente sempre positivo, una tale tesi comincia seriamente a vacillare in presenza di un tasso senza rischio piuttosto elevato. Il tasso utilizzato per ottenere la figura 3 era del 5%. Il lettore attento avrà notato come, in presenza di una vita residua molto elevata (intorno ad un anno), il grafico accennava una leggera concavità in prossimità della barriera. Si osservi ora il grafico (figura 4) della medesima opzione in presenza di un tasso del 15% (volutamente esagerato).

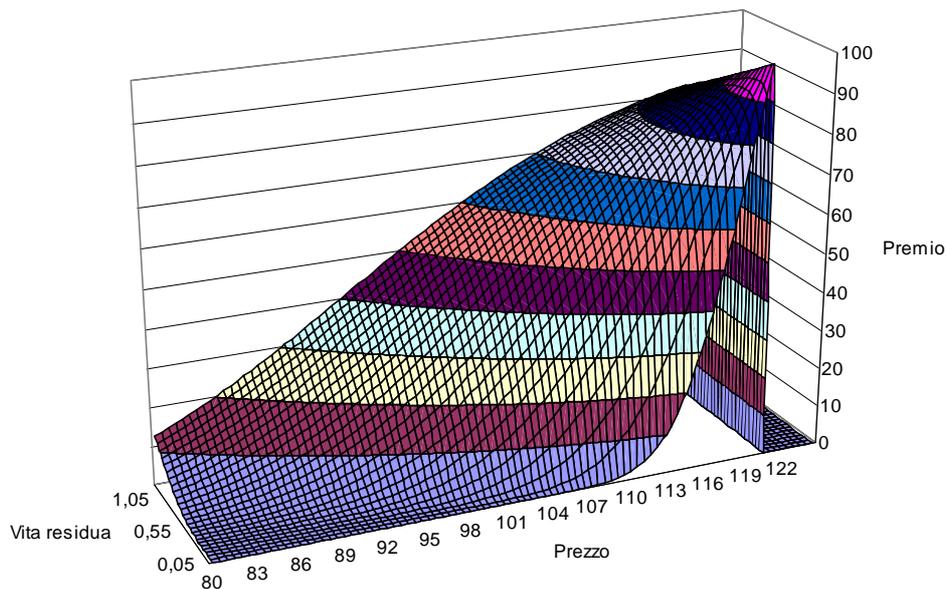


Figura 4 - Premio di una *deferred up and in* ($H=120$) in funzione del prezzo e della vita residua (tasso=15%)

Per valori del prezzo prossimi alla barriera ed in corrispondenza di una vita residua sufficientemente elevata il grafico presenta una strana “gobba” (o rigonfiamento). L'accentuarsi della concavità (*Gamma* negativo) in tali condizioni non è certo una casualità ed esiste anzi una spiegazione intuitiva per tale fenomeno.

Un elevato tasso di interesse implica, in base alle nostre assunzioni relative all'utilizzo del metodo probabilistico, una spiccata tendenza del prezzo del sottostante a variare in aumento: questo significa che, per valori di partenza del prezzo sufficientemente alti ed in presenza di una vita residua piuttosto lunga, il perforamento della barriera è un evento praticamente certo, o comunque probabilissimo. Chiaramente in tali condizioni un ulteriore aumento del prezzo non può che avere effetti estremamente limitati sul valore della *digital*, soprattutto se paragonati con l'aumento di valore di cui può beneficiare la stessa per medesimi movimenti del prezzo, ma in presenza di una vita residua ridotta (ed in combinazione con valori di partenza del prezzo prossimi alla barriera). Queste sono dunque le ragioni che portano il *Gamma* negativo a predominare in una porzione non trascurabile del grafico 4.

In realtà, tuttavia, come si è già fatto intuire prima, il *Gamma* (il lettore osservi la curvatura del grafico nella figura 3) presentava un'inversione di segno anche nel caso di un tasso del

5%; è il caso però di sottolineare come tale inversione fosse di modeste proporzioni: il *Gamma* negativo non scendeva mai sotto $-0,25$, contro il quasi 3 raggiunto dal *Gamma* positivo in prossimità della scadenza. Con un tasso del 15% al contrario il *Gamma* può scendere fino a -1 (ovvero quattro volte tanto) in prossimità della barriera e a poco tempo dalla scadenza dell'opzione: in effetti, a prescindere dall'effetto tasso ed in apparente contrasto con quanto detto, è più facile trovare *Gamma* fortemente negativi in presenza di una bassa vita residua, quando cioè il comportamento dell'opzione si fa giocoforza più brusco, anche se un'alta vita residua abbassa (nelle *up and in*) notevolmente il prezzo a partire dal quale il *Gamma* inverte il suo segno; in altre parole una bassa vita residua rende l'inversione quantitativamente notevole ma circoscritta alla "zona di prezzo" appena a ridosso della barriera (per la qual ragione risulta scarsamente visibile nei grafici), mentre un'opzione più "giovane" presenta inversioni più modeste, ma estese ad una "zona" ben più estesa (e ben più visibile sul grafico).

Il grafico a due dimensioni rappresentato nella figura 5 mostra il comportamento della medesima opzione a quattro e a sedici (!) mesi dalla scadenza, rendendo ancora più evidente la variabilità della curvatura (il *Gamma*) in funzione della vita residua.

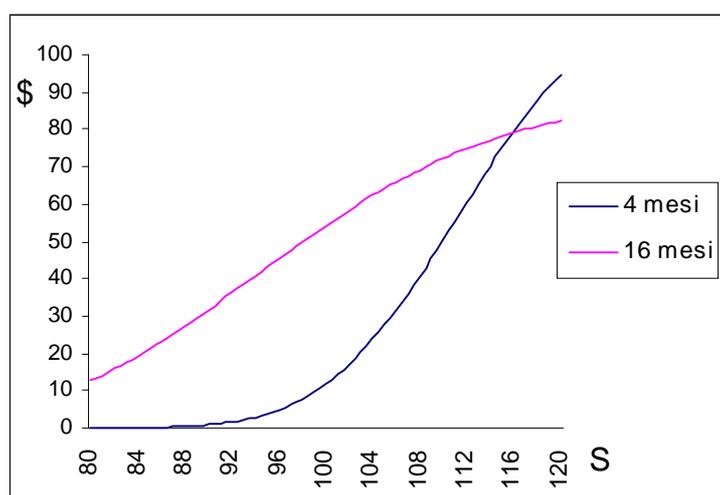


Figura 5 - Il premio di una *deferred up and in* ($H=120$) a 4 e a 16 mesi dalla scadenza.

Questo grafico tuttavia non si limita a confermare la validità delle intuizioni sopra sviluppate. È facile infatti notare (il lettore attento avrà rilevato il fenomeno già osservando il grafico tridimensionale) come il prezzo della *digital* più "vecchia" (con minore vita residua) arrivi controintuitivamente a superare il prezzo dell'opzione "giovane" per valori del prezzo sufficientemente alti. Tale fenomeno appare controintuitivo, in quanto ci si aspetterebbe che il *time decay* operasse in corrispondenza di qualsiasi livello del prezzo. In realtà occorre tenere nel debito conto anche l'effetto sul prezzo relativo all'attualizzazione dello stesso. In effetti per valori del prezzo del sottostante sufficientemente alti la probabilità di perforamento della barriera è così alta da risultare assai poco sensibile al passaggio del tempo. È questa la ragione per cui, in presenza di tassi particolarmente alti (non dimentichiamo che stiamo ragionando sulla base di un iperbolico 15%) e di prezzi sufficientemente prossimi alla barriera, l'effetto attualizzazione supera l'effetto *time decay* e porta il prezzo della *digital* a crescere con il passare del tempo. A titolo esemplificativo si fa notare come in presenza di un tasso del 15% e di uno spot vicinissimo alla barriera, poniamo pari a 119\$ (le altre condizioni sono le medesime riportate più sopra), il valore dell'opzione passa da 89\$ circa a nove mesi dalla scadenza ai ben 96\$ rilevabili (a parità assoluta di condizioni) in presenza di una vita residua ridotta a tre mesi. Con un tasso ridotto al 5% chiaramente il fenomeno è molto meno marcato e

tuttavia ancora presente: si passa in questo caso da 96\$ a 99\$ circa (anche qui passando da nove a tre mesi dalla scadenza).

Tornando a considerazioni più funzionali alla copertura delle *digital* americane, osserviamo il grafico della funzione *Delta* (figura 6). Per prezzi molto alti e vita residua sufficientemente elevata è facile constatare come la funzione, dopo aver raggiunto un massimo assoluto, tenda a decrescere, confermando quanto osservato relativamente al *Gamma* (si badi che in questo caso è stato sufficiente utilizzare un tradizionale $r=5\%$). In termini generali comunque, ciò che importa rilevare è la costante tendenza del *Delta* a crescere, al passare del tempo, per valori del prezzo sufficientemente alti e a fare l'esatto opposto (decrescere) per valori del prezzo troppo lontani dalla barriera. Evidentemente anche nel caso delle binarie americane si ripropone lo stesso problema riscontrato nella trattazione delle *digital* europee: per prezzi vicini alla barriera ed una scadenza dell'opzione ravvicinata il *Delta* diventa esplosivo, rendendo di fatto impraticabile la copertura dinamica della *digital*. Basti pensare del resto come la funzione *Delta* passi, in corrispondenza di uno spot di 119\$, dal 3,6 a nove mesi dalla scadenza a circa 7,2 (il doppio) a tre mesi, fino a quasi 18, quando alla scadenza mancano soltanto un paio di settimane. Ad ogni modo esamineremo la questione della copertura più approfonditamente nel paragrafo seguente.

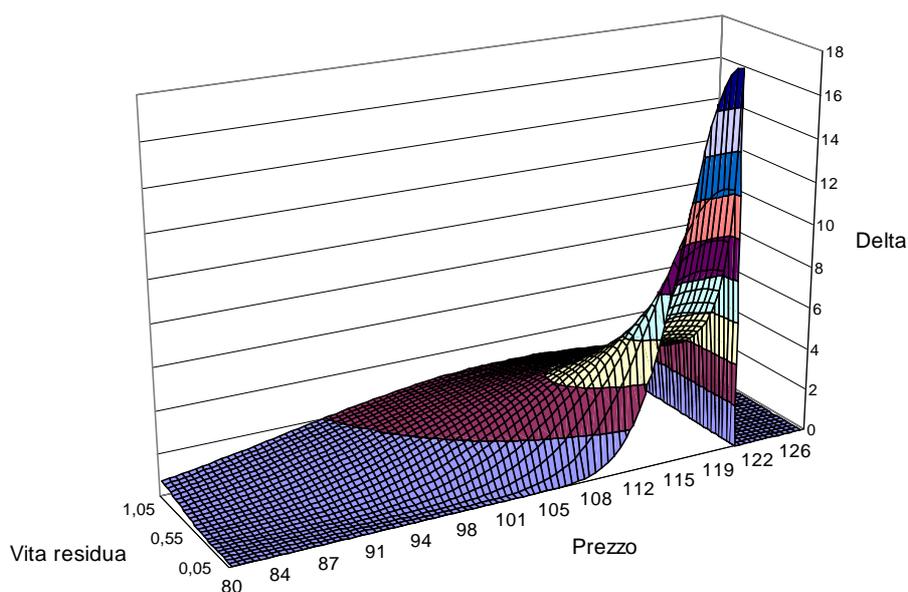


Figura 6 - Il *Delta* di una *deferred up and in* ($H=120$) in funzione del prezzo del sottostante e della vita residua.

Abbiamo già effettuato alcune considerazioni all'inizio del paragrafo circa il comportamento del coefficiente *Vega* in una *digital* americana: è ora il caso di verificare la veridicità di tali affermazioni (ed altro) attraverso lo studio del relativo grafico (figura 7). Il grafico non fa altro che confermare quanto detto circa il segno del coefficiente *Vega*. Del resto, come già rilevato, per poter osservare un *Vega* negativo dovremmo disporre di un grafico che non finisca a quota 120\$ del prezzo (non ci dovrebbe essere l'estinzione dell'opzione al raggiungimento della barriera). Non è comunque questa l'unica informazione ricavabile dalla figura 7. Come lecito aspettarsi il *Vega* raggiunge i massimi livelli in corrispondenza di volatilità di partenza basse e per prezzi del sottostante prossimi alla barriera: ciò si spiega con il fatto che, in prossimità

della barriera, basta un piccolo aumento della bassa volatilità di partenza per ottenere un considerevole aumento della probabilità di perforamento della barriera; è quanto non accade nel caso di prezzi troppo lontani dalla barriera (sempre in presenza di bassa volatilità di partenza), nel qual caso la speranza di vedere perforata la barriera è talmente bassa da risultare molto poco sensibile a modesti aumenti della volatilità. A riprova di quanto detto il $Vega(110, 10\%)$ (il $vega$ calcolato in base ad uno spot di 110\$ e ad una volatilità di partenza del 10%) è pari a 400 circa (si badi che, per una questione di leggibilità, tutti i valori del $vega$ sono moltiplicati per cento), mentre il $Vega(90, 10\%)$ risulta sostanzialmente nullo. Un ragionamento esattamente speculare vale per valori di partenza della volatilità sufficientemente alti: per volatilità elevate e prezzi vicini alla barriera la probabilità di perforamento della barriera è tanto prossima all'unità da risultare quasi insensibile ad ulteriori aumenti della volatilità, mentre per prezzi sufficientemente lontani dalla barriera c'è ancora spazio per un aumento apprezzabile della medesima. Infatti, volendo offrire ulteriori esempi numerici, $Vega(119, 30\%)$ è praticamente nullo, mentre $Vega(96, 30\%)$ ammonta a 140.

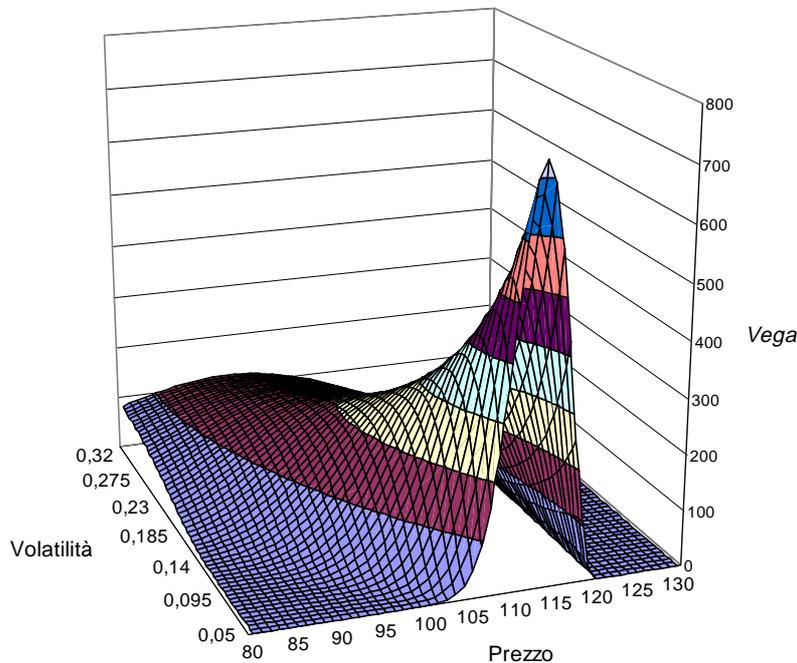


Figura 7 -Vega di una *deferred up and in* ($H=120$) in funzione del prezzo del sottostante e della volatilità.

Immediate up and in

Tutte queste considerazioni hanno avuto per oggetto, sinora, le *deferred american binary*. Giunge dunque spontaneo, a questo punto, chiedersi se tali argomentazioni possano risultare valide anche per le *immediate american binary* che, come già rilevato, si differenziano dalle *deferred* per il pagamento immediato (al momento della perforazione della barriera), e non a scadenza, della somma (B) pattuita in caso di estinzione favorevole. Osserviamo prima di tutto il grafico relativo all'andamento del premio in funzione del prezzo del sottostante e della vita residua (figura 8: barriera, tasso, volatilità e *payoff* sono gli stessi utilizzati per le *deferred*,

ovvero $H = 120\$$, $\sigma = 15,7\%$, $r_f = 5\%$, $B = 100\$$). Non può certo dirsi operazione complessa il constatare la sostanziale identità di tale grafico con quello relativo alla *deferred binary*. Tuttavia, a dire il vero, esiste una minima differenza: nelle *immediate binary* non troviamo più, in corrispondenza di prezzi prossimi alla barriera, il *time decay* negativo che, al contrario, era riscontrabile nelle *deferred* (in maniera tanto più marcata quanto più alto era il tasso senza rischio). Ciò si spiega con il fatto che, in questo caso, il fattore di attualizzazione non agisce più, come nelle *deferred*, in maniera indipendente, ma risulta strettamente legato alla probabilità di perforazione della barriera (si veda in proposito la gaussiana inversa ed il procedimento seguito per il *pricing* delle *immediate* nel secondo paragrafo del presente capitolo). Per il resto le caratteristiche delle due tipologie di *digital* americane sono praticamente identiche.

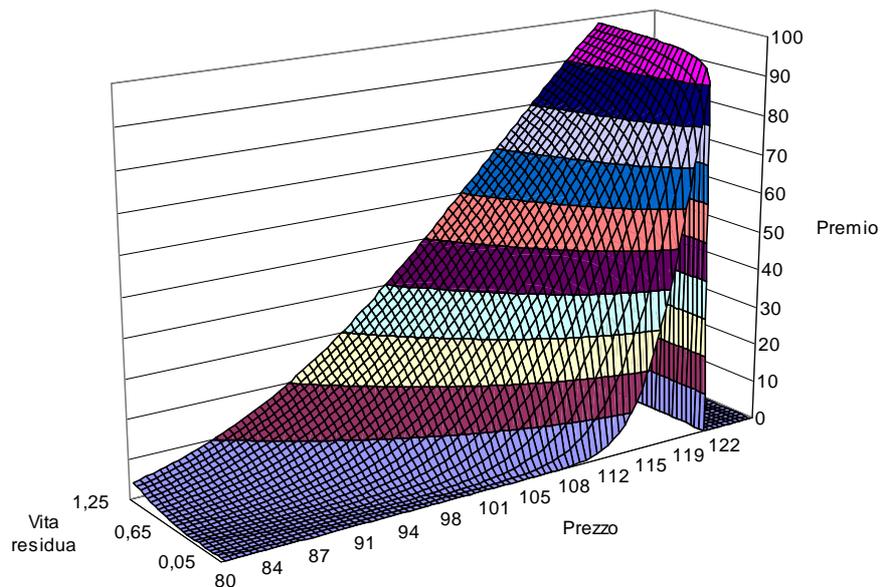


Figura 8 - Premio di una *immediate up and in* ($H=120$) in funzione del prezzo e della vita residua.

Deferred down and in

Cerchiamo ora di estendere la nostra analisi alle *down and in* (quelle con il prezzo *spot* posto al di sopra della barriera da perforare). Di primo acchito ci si potrebbe aspettare una completa specularità del comportamento delle *down and in* rispetto alle *up and in*: in effetti, in larghissima parte, ciò risponde a verità, anche se con una piccolissima eccezione. Osserviamo il grafico relativo al comportamento di una *down and in deferred digital* (figura 9: a parte la barriera posta a quota 90\$ le rimanenti condizioni sono le stesse dei grafici precedenti). Come è facile constatare il grafico rivela una fin troppo ovvia analogia con quello delle *up and in*,

tranne appunto per un particolare: non c'è il benché minimo accenno, in prossimità della barriera, ad un moderarsi della pendenza del grafico. La cosa in realtà non dovrebbe stupire più che tanto se solo si riporta alla memoria la ragione per cui, nelle *up and in*, era possibile un'inversione del *Gamma* in prossimità della barriera: la presenza di un *drift* positivo che, proprio per prezzi vicini alla barriera (ed elevata vita residua), rendeva tanto probabile il perforamento della stessa da impedire un congruo aumento di valore dell'opzione per ulteriori aumenti del prezzo del sottostante. Chiaramente, con una barriera da perforare dall'alto, vale per le *down and in* il ragionamento opposto: tanto più alto è il tasso d'interesse (tanto più alto è il *drift*) tanto più difficile diventa il perforamento della barriera e quindi tanto più sensibile diventa il prezzo dell'opzione all'andamento del prezzo del sottostante. È questa dunque la ragione che porta ad una funzione *Gamma* costantemente positiva, come del resto facilmente verificabile osservando la figura 10. Volendo offrire una riprova numerica di quanto detto circa l'influenza del *drift* sulla convessità delle *down and in digital* basti considerare le cifre seguenti: il *Gamma*(95, 3mesi) (il *Gamma* calcolato in corrispondenza di uno spot di 95\$ e di una vita residua di tre mesi) vale 1,05 circa in presenza di un tasso pari al 5%, per arrivare a 1,42 con un tasso del 15%; in sostanza, in accordo con quanto accennato sopra, un aumento del *drift* porta ad un aumento della convessità.

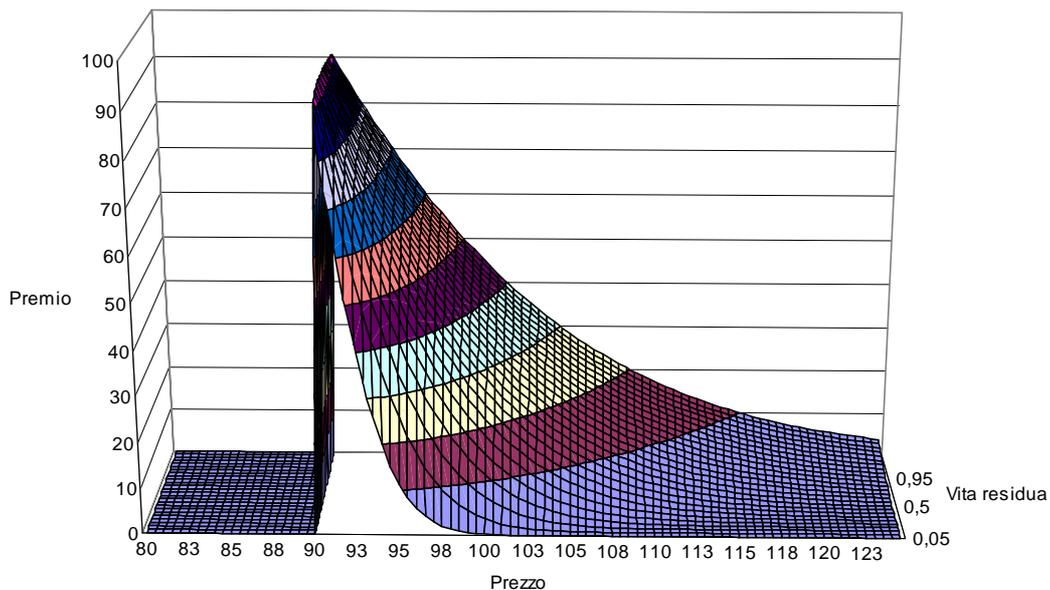


Figura 9 - Andamento del premio di una *down and in* ($H=90$) in funzione del prezzo e della vita residua

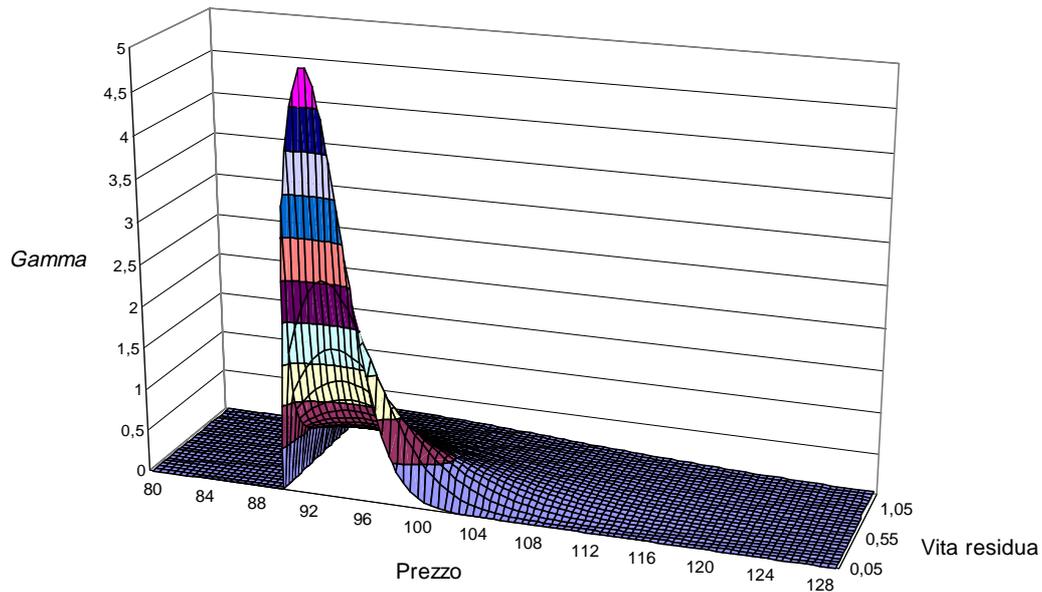


Figura 10 - Gamma di una *down and in* ($H=90$) in funzione del prezzo del sottostante e della vita residua

Si conclude qui questo secondo paragrafo dedicato alle caratteristiche generali delle binarie americane. Nel prossimo paragrafo cercheremo di occuparci più da vicino delle problematiche relative alla copertura di tali opzioni.

4.4 Copertura delle *digital* americane

Diamo inizio all'analisi con la valutazione del profilo dei risultati offerti dalla copertura tramite *hedging* sul sottostante. Per la precisione ipotizziamo di dover coprire 100 opzioni binarie (*deferred binary options*), con scadenza a 30 giorni, barriera a quota 105, che paghino 100\$ in caso di esercizio. Ipotizziamo inoltre che il prezzo spot ammonti a 100\$ (avremo dunque a che fare con delle *up and in binary*), il tasso senza rischio sia del 5%, mentre la volatilità del sottostante sia pari a 15,7%. La copertura è effettuata vendendo una quantità *Delta* di sottostante. La tabella 1 mostra i risultati offerti dalla copertura a brevissimo termine (*Delta* fisso e assenza di *time decay*).

Tabella 1 - Risultati offerti dalle due posizioni per i diversi livelli di prezzo raggiunti dal sottostante.

Prezzo	Premio	Risultato opzione	Risultato sottostante	Totale
94,80	6,87	-3251,54	5160,21	1908,67
95,20	8,13	-3126,00	4763,27	1637,27
95,60	9,56	-2983,24	4366,33	1383,09
96,00	11,17	-2821,98	3969,39	1147,41
96,40	12,98	-2640,99	3572,45	931,45
96,80	15,00	-2439,17	3175,51	736,34
97,20	17,23	-2215,53	2778,57	563,03
97,60	19,70	-1969,29	2381,63	412,34
98,00	22,39	-1699,82	1984,69	284,86
98,40	25,32	-1406,76	1587,75	180,99
98,80	28,49	-1089,97	1190,81	100,84
99,20	31,89	-749,58	793,87	44,28
99,60	35,53	-386,02	396,93	10,91
100,00	39,39	0	0	0
100,40	43,46	407,49	-396,93	10,55
100,80	47,74	835,15	-793,87	41,27
101,20	52,20	1281,41	-1190,81	90,6
101,60	56,83	1744,44	-1587,75	156,68
102,00	61,61	2222,15	-1984,69	237,46
102,40	66,51	2712,26	-2381,63	330,63
102,80	71,51	3212,30	-2778,57	433,73
103,20	76,59	3719,66	-3175,51	544,14
103,60	81,71	4231,62	-3572,45	659,16
104,00	86,84	4745,40	-3969,39	776,00
104,40	91,97	5258,21	-4366,33	891,88
104,80	97,06	5767,28	-4763,27	1004,01
105,20	100	6060,58	-5160,21	900,37
105,60	100	6060,58	-5557,15	503,43
106,00	100	6060,58	-5954,09	106,49
106,40	100	6060,58	-6351,03	-290,45
106,80	100	6060,58	-6747,97	-687,39
107,20	100	6060,58	-7144,91	-1084,3

I dati contenuti nella tabella possono essere meglio letti ed interpretati osservando la figura 11.

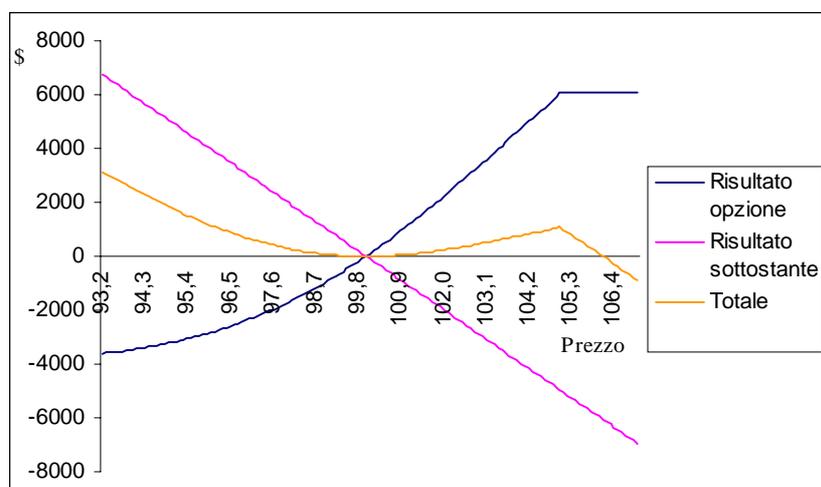


Figura 11 - Risultati (a brevissimo) della copertura di una *deferred up and in* attraverso sottostante

Chiaramente il lettore riconoscerà, anche senza l'ausilio della legenda, nella linea retta l'andamento del valore della posizione mantenuta nel sottostante ed in quella che parte poco sopra quota -4000 l'andamento della posizione in opzioni. La terza linea rappresenta evidentemente la somma dell'andamento delle due posizioni sopra specificate.

Dal grafico emerge dunque piuttosto chiaramente il ruolo favorevole giocato dall'effetto *Gamma* relativo alle *american binary*: nel brevissimo termine (il che significa sostanziale trascurabilità del *time decay* e mancanza di riassetto della copertura), qualsiasi sia il livello di prezzo raggiunto dal sottostante, la nostra posizione complessiva ci garantisce non solo l'assenza di perdite ma anche la presenza di utili per quasi tutti i livelli di prezzo. Evidentemente questo stesso effetto *Gamma* che premia l'acquisto e la copertura della *digital* andrà a discapito del *writer*, ovvero di colui che l'opzione la vende, cercando di porre in essere un'analogo copertura (naturalmente di segno opposto).

Un problema non del tutto trascurabile (anzi) è la scomparsa della posizione in opzioni per prezzi superiori alla barriera, nel caso eventuale in cui questa non sia controbilanciata da una tempestiva chiusura della posizione nel sottostante. In effetti al momento dell'estinzione anticipata delle *digital* si rende necessaria l'immediata chiusura della posizione nell'*underlying* con l'evidente scopo di evitare che questa, non compensata dall'andamento opposto della posizione in opzioni, possa generare le perdite messe in rilievo dallo stesso grafico per prezzi superiori alla barriera.

Tale immediata chiusura non risulta sempre del tutto agevole ed indolore, specialmente in certi casi limite. Osserviamo il diverso andamento della posizione complessiva ipotizzando una vita residua non solo di 30 ma anche di 20 e 10 giorni rispettivamente⁴ (figura 12). È facile verificare l'accentuarsi della convessità della posizione al diminuire della vita residua. Ciò è chiaramente dovuto all'accentuarsi dell'effetto *Gamma* nella *digital* (in presenza di una bassa vita residua, al crescere del prezzo sottostante, il *Delta* tende ad aumentare molto rapidamente, fino a raggiungere livelli notevoli). Apparentemente, dunque, coprire l'acquisto di una *deferred up and in binary* dovrebbe risultare operazione tanto più profittevole quanto minore è

⁴ Si veda anche Taleb (1997: 298-305) (ai cui spunti di riflessione si ispira del resto gran parte del paragrafo).

la vita residua dell'opzione (si tenga però presente che il grafico non può tenere conto del *time decay*). In realtà, come si accennava poc'anzi, esistono seri problemi relativi alla gestione della posizione nel sottostante, problemi tanto più marcati quanto maggiore risulta il *Delta* della *digital* e dunque quanto minore è la vita residua dell'opzione.

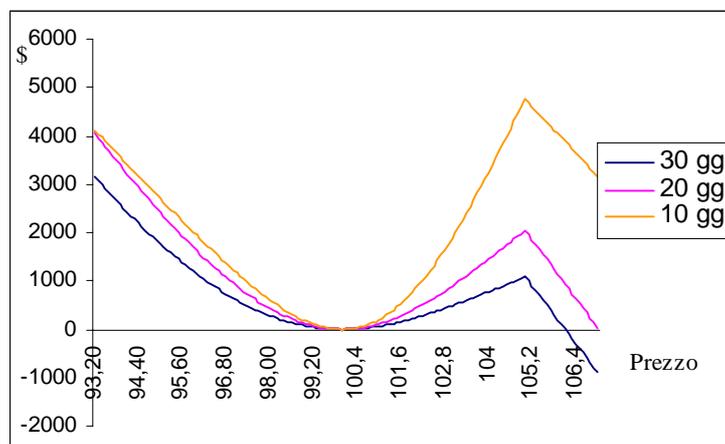


Figura 12 - Andamento della posizione coperta per diverse scadenze (*deferred up and in* più *Delta* sottostante)

In effetti quanto maggiore è il *Delta* della posizione in opzioni, tanto più cospicua deve risultare la posizione mantenuta nel sottostante a scopo di copertura. Tale posizione, come spiegato, dovrà essere rapidamente chiusa all'estinguersi della *digital*. Esistono tuttavia dei fenomeni sul mercato che rendono la chiusura di posizioni quantitativamente notevoli non del tutto semplice ed indolore: ad esempio il fenomeno detto *slippage*, oppure quello definito dei *liquidity holes*⁵. Si tratta di problemi piuttosto gravi, legati alla mancanza di liquidità di certi mercati. Con il termine *slippage* si vuole fare riferimento al fenomeno per cui, su di un mercato non troppo liquido, chi cerca di trattare quantità consistenti di una data attività finisce con l'influenzarne pesantemente il prezzo di mercato, al punto da dover vendere o acquistare a prezzi più svantaggiosi di quelli vigenti prima dell'operazione (il che significa provocare un ribasso dei prezzi quando si vende oppure un rialzo degli stessi quando si acquistano quantità notevoli dell'attività in questione). Naturalmente si tratta di fenomeni che possono rivelarsi veramente importanti solo in presenza di una certa sincronia negli acquisti e vendite di una parte significativa degli *hedger* di un dato mercato, in maniera tale da premere in modo determinante sulla liquidità del mercato.

Ad ogni modo, come si è già lasciato intuire, non sono solo queste considerazioni relative alle difficoltà di gestione di *Delta* elevati a rendere non del tutto vantaggiosa la copertura di binarie prossime alla scadenza: infatti, a compensare il beneficio che, in termini di una marcata convessità, offre l'acquisto della *digital* "stagionata" subentra anche un consistente effetto *Theta*. La figura 13 dovrebbe aiutare a comprendere l'entità dell'effetto in questione. È facile constatare come il *time decay* si manifesti in maniera tanto più marcata quanto più vicina è la scadenza dell'opzione e quanto più prossimo alla barriera risulta essere il prezzo corrente del sottostante. L'accelerazione del *time decay* all'avvicinarsi della scadenza si spiega abbastanza agevolmente se solo si pensa alla relazione lineare che lega la deviazione standard dei movimenti del sottostante alla radice quadrata del tempo mancante prima della scadenza: non a caso il profilo di decadimento presenta, per prezzi sufficientemente vicini alla barriera,

⁵ Per una spiegazione esauriente di tali fenomeni si veda, ancora, Taleb (1997: capitolo quarto).

forti analogie con l'andamento della funzione radice quadrata al diminuire del valore della variabile indipendente. Quanto al prezzo corrente del sottostante, va da sé che il *time decay* agisce tanto più efficacemente quanto maggiore è il valore dell'opzione suscettibile di erosione temporale e dunque quanto più vicino alla barriera si viene a trovare il prezzo del sottostante.

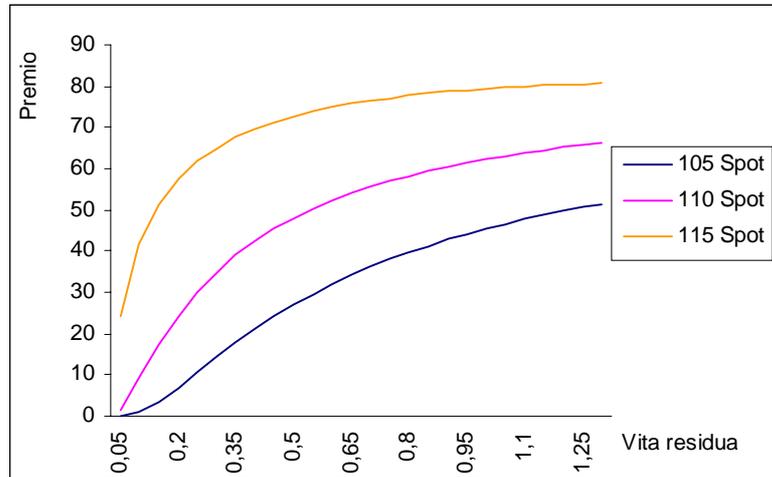


Figura 13 - Time decay di una *deferred up and in* per diversi livelli del prezzo

Da quanto detto emerge dunque chiaramente come il cosiddetto effetto *Theta* raggiunga il suo apice proprio in presenza di quelle stesse condizioni che rendono più forte e vantaggioso l'effetto *Gamma*. In sostanza quindi il rischio cui va incontro l'acquirente di una *digital* americana prossima a scadenza è quello di beneficiare sì di una marcata convessità ma anche di vedere il valore del proprio investimento letteralmente sgonfiarsi sotto l'effetto del *time decay*.

Per quanto riguarda il rischio *Vega*, ossia il rischio derivante da scostamenti sfavorevoli della volatilità effettiva da quella implicita (nel nostro caso diminuzioni della volatilità), osserviamo prima di tutto come varia l'andamento di una *digital* (barriera a quota 120\$) al variare della volatilità implicita (figura 14).

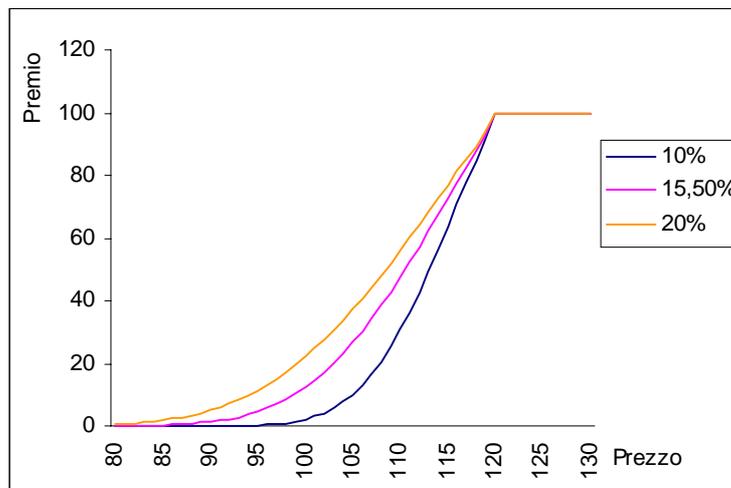


Figura 14 - Andamento di una *deferred up and in* in corrispondenza di diverse volatilità implicite

Il grafico è relativo ad un'american digital con sei mesi di vita residua. L'effetto di una variazione della volatilità implicita risulta particolarmente rilevante per prezzi intermedi, ovvero per prezzi né troppo lontani né troppo vicini alla barriera. Al contrario l'effetto della variazione di volatilità diventa via via meno rilevante allontanandosi dalla barriera o addirittura nullo nel caso di prezzi vicinissimi alla barriera. Tali considerazioni non sono accademiche: questo fenomeno accentua le difficoltà che l'operatore può incontrare nel tentativo di coprire il rischio *Vega* utilizzando strumenti finanziari che non svaniscono, come al contrario fa la *digital*, in corrispondenza della barriera. Quanto alla relazione tra coefficiente *Vega* ed i diversi possibili livelli di partenza della volatilità implicita è abbastanza prevedibile un andamento via via discendente della funzione in questione (il *Vega*) al crescere della volatilità di partenza. Tale intuizione trova una conferma (per valori dello spot sufficientemente alti) nella figura 15.

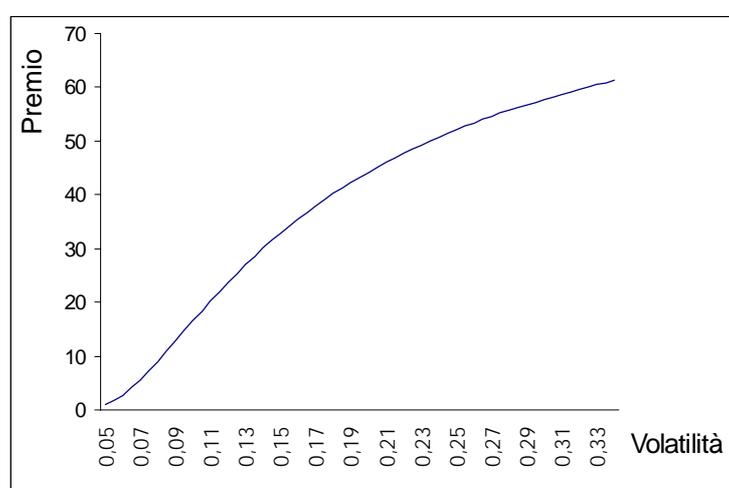


Figura 15 - Relazione premio/volatilità di una *deferred up and in* ($spot=107\$, H=120$)

La concavità della funzione rappresentata nel grafico può costituire un problema per chi intenda coprire (da acquirente della *digital*) il rischio *Vega* utilizzando strumenti caratterizzati da una sensibilità lineare (o quasi) a variazioni della volatilità. Una tale copertura esporrebbe a perdite sicure in caso di variazioni della volatilità sufficientemente alte: si tratta in sostanza di un fenomeno del tutto analogo ad un effetto *Gamma* sfavorevole. Il problema consiste in questo caso nel fatto che, mentre l'effetto *Gamma*, all'interno di un impianto di valutazione alla Black e Scholes, risulta "prezzato", non altrettanto può dirsi per tale fenomeno, per la banale ragione che i modelli tradizionali (alla Black e Scholes) presuppongono una volatilità costante.

Chiaramente quanto detto finora vale anche, capovolto (ad esempio il *writer*, in maniera dunque del tutto opposta rispetto al detentore dell'opzione, sopporta il rischio *Gamma* e beneficia dell'effetto *Theta*), per l'emittente dell'opzione. Questi deve dunque confrontarsi, specialmente in condizioni analoghe a quelle descritte nel capitolo precedente (ricalibramento del *Delta* non continuo e *trend* più o meno lunghi nei movimenti del sottostante), con un pericoloso rischio *Gamma* e, rispetto alle più semplici *European digital*, con i problemi connessi allo "smaltimento" tempestivo di consistenti posizioni nel sottostante (ed in altre opzioni nel caso copra ad esempio anche il rischio *Vega*) a seguito dell'improvvisa eventuale estinzione anticipata dell'opzione; va comunque ricordato come tale possibilità di estinzione vada anche a mitigare significativamente, nei pressi della barriera, l'effetto *Gamma* (che non a caso cambia segno) a tutto vantaggio del *writer* e a discapito del detentore.

È il caso tuttavia di ricordare come l'operatore possa trovare vantaggiosa l'applicazione di approcci diversi alla gestione delle *american binary*: ad esempio in prossimità della scadenza potrebbe essere consigliabile la rinuncia all'*hedging* dinamico ed il ricorso a forme di gestione di tipo "statistico" (si veda il capitolo precedente). Taleb (1997) suggerisce anche l'utilizzo, a fini di copertura, di opzioni barriera, ovvero delle opzioni strutturalmente più simili alle *digital* americane, mentre sconsiglia apertamente il ricorso a *vanilla* o a *digital* della varietà europea (che a suo dire andrebbero bene solo in presenza di una bassissima vita residua). Esiste tuttavia un'ulteriore possibilità che Taleb non menziona ma che può valere la pena esaminare: lo *static hedging* delle *american binary* con utilizzo contemporaneo di *vanilla* e *digital* europee.

La copertura statica delle binarie americane

Per la verità, affinché la copertura risulti perfetta, è necessario assumere un *drift* nullo (il che, per le opzioni valutarie, significa uguaglianza tra tasso domestico e tasso sulla valuta merce) oppure, che è poi lo stesso, il riferimento a prezzi *forward* anziché *spot*.

Cominceremo col mostrare la base matematica su cui poggia la copertura statica delle *deferred up and in cash or nothing*. Consideriamo la formula utilizzata per la valutazione della *digital* americana appena citata nonché quella relativa alle *binary* di tipo europeo (in questo caso *call*):

$$Ad = e^{-rt} B \left\{ N \left(-\frac{\ln(H/S) - rt + \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}} \right) + \left(\frac{H}{S} \right)^{2(r - \sigma^2/2)/\sigma^2} N \left(-\frac{\ln(H/S) + rt - \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}} \right) \right\}$$

$$Ed = e^{-rt} B \cdot N \left(\frac{\ln(S/K) + rt - \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}} \right),$$

dove *Ad* sta per *american digital* ed *Ed* sta per *european digital*.

Supponiamo ora che il tasso sia nullo e che $K=H$ (lo *strike* della binaria europea sia uguale alla barriera dell'americana). La prima formula può essere così riscritta:

$$Ad = B \cdot N \left(-\frac{\ln(H/S) + \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}} \right) + B \cdot \frac{S}{H} \cdot N \left(-\frac{\ln(H/S) - \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}} \right) =$$

$$= B \cdot N \left(\frac{\ln(S/H) - \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}} \right) + B \cdot \frac{S}{H} \cdot N \left(\frac{\ln(S/H) + \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}} \right).$$

In quest'ultima versione la formula ricorda molto da vicino (basta raccogliere B/H) quella di una *vanilla call*: unico problema il segno positivo del primo addendo. È a questo punto che entra in scena la binaria europea; la sua formula è infatti identica al primo addendo (per $K=H$): per "cambiare il segno" di quest'ultimo sarà dunque sufficiente sommare e sottrarre la *european binary*. Possiamo così scrivere:

$$Ad = 2Ed - B \cdot N \left(\frac{\ln(S/H) - \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}} \right) + B \cdot \frac{S}{H} \cdot N \left(\frac{\ln(S/H) + \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}} \right) =$$

$$= 2Ed + \frac{B}{H} \left[-H \cdot N \left(\frac{\ln(S/H) - \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}} \right) + S \cdot N \left(\frac{\ln(S/H) + \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}} \right) \right].$$

Il lettore riconoscerà facilmente nel contenuto delle parentesi quadre la formula (a *drift* annullato e con *strike* pari ad H) delle *vanilla call*. In sostanza quindi (V_c sta per *vanilla call*):

$$Ad = 2Ed + \frac{B}{H} V_c.$$

L'equazione indica che, per replicare perfettamente una *up and in american digital*, è sufficiente acquistare due *digital* europee (con *strike* posto uguale alla barriera della *binary* americana ed identico *payoff* B) nonché una quantità B/H di *vanilla call* con *strike* pari ad H . Il grafico rappresentato in figura 16, ottenuto per un *drift* nullo, e relativo all'andamento in funzione del prezzo sottostante della *american digital* a confronto con la replica così costruita, conferma la validità dello sviluppo appena concluso.

Volendo offrire un'interpretazione più intuitiva della composizione della replica è sufficiente considerare come, in presenza di un *drift* nullo, una *digital* europea, in corrispondenza dello *strike*, vale all'incirca la metà del suo *payoff* massimo potenziale B : ciò per il semplice fatto che, una volta che il prezzo sottostante sia giunto a quota K , esso può, all'incirca con la medesima probabilità, concludere la sua corsa al di sopra di K (ottenendo nel nostro caso 100\$) oppure al di sotto dello stesso (ottenendo zero). Ad ogni modo è proprio l'espressione "all'incirca" a giustificare la presenza delle *vanilla call*; infatti, per una questione di lognormalità della distribuzione dei prezzi, anche in presenza di un tasso nullo la probabilità che il prezzo cali è leggermente superiore alla probabilità che esso salga: la conseguenza è che la binaria europea vale, in corrispondenza di K , un poco meno di $B/2$. Dunque due *digital* europee hanno bisogno ancora di una piccola spinta per raggiungere il valore della collega americana (che per $S=H$ vale ovviamente B): la spinta ulteriore è offerta dalle *vanilla call*.

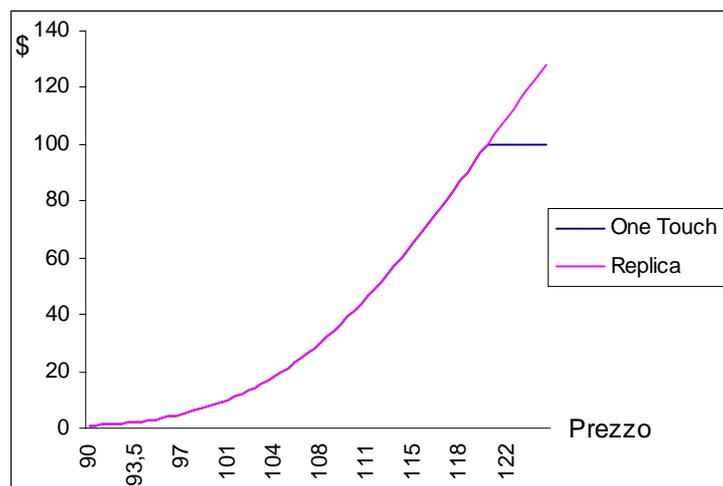


Figura 16 - *Deferred up and in* e replica a confronto per $K=H=120$ \$, $t=6$ mesi, $\sigma=15,7\%$, $B=100$ \$

Per quanto riguarda le *down and in cash or nothing* il metodo matematico di derivazione della replica è del tutto analogo. Consideriamo le due formule relative alle *digital* americana ed europea (questa volta *put*):

$$Ad_{di} = e^{-rt} B \left\{ N \left(\frac{\ln(H/S) - rt + \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}} \right) + \left(\frac{H}{S} \right)^{2(r-\sigma^2/2)/\sigma^2} N \left(\frac{\ln(H/S) + rt - \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}} \right) \right\}$$

$$Ed_{put} = e^{-rt} B \cdot N \left(\frac{\ln(K/S) - rt + \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}} \right).$$

Posto $r=0$ e $K=H$ siamo in grado di procedere al modo solito:

$$\begin{aligned} Ad_{di} &= B \cdot N \left(\frac{\ln(H/S) + \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}} \right) + B \cdot \frac{S}{H} \cdot N \left(\frac{\ln(H/S) - \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}} \right) = \\ &= 2Ed_{put} - B \cdot N \left(\frac{\ln(H/S) + \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}} \right) + B \cdot \frac{S}{H} \cdot N \left(\frac{\ln(H/S) - \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}} \right) = \\ &= 2Ed_{put} - \frac{B}{H} \left[H \cdot N \left(\frac{\ln(H/S) + \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}} \right) - S \cdot N \left(\frac{\ln(H/S) - \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}} \right) \right] = \\ &= 2Ed_{put} - \frac{B}{H} \left[H \cdot N \left(-\frac{\ln(S/H) - \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}} \right) - S \cdot N \left(-\frac{\ln(S/H) + \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}} \right) \right] = \\ &= 2Ed_{put} - \frac{B}{H} Vp, \end{aligned}$$

dove Vp sta per *Vanilla Put*.

Ovviamente tanto la *put* binaria (Ed_{put}) quanto quella *vanilla* (Vp) presentano uno *strike* uguale alla barriera della *digital* americana. Riassumendo si può dire che la replica di una *down and in cash or nothing* include l'acquisto di due binarie europee (con stesso *payoff*) nonché la vendita di B/H *vanilla put*.

Il lettore potrà nutrire dei dubbi sulla concreta applicabilità di tale copertura statica, specialmente in considerazione della scarsa liquidità offerta dal mercato delle *digital* di varietà europea. Ma lo stesso lettore ricorderà come tali *digital* siano a loro volta replicabili per mezzo di semplici *vertical spreads*: in sostanza è possibile utilizzare, nella copertura statica di una *american binary*, una replica composta esclusivamente di *vanilla*. Ovviamente lo *spread* non godrà della medesima precisione offerta dalle *digital* ma potrà comunque servire decorosamente allo scopo.

Per quanto riguarda la questione *drift*, se essa nemmeno si pone nel caso di riferimento a prezzi *forward*, può tuttavia in caso contrario creare qualche problema, specialmente se il *drift* non nullo si accompagna ad una vita residua considerevole (che dà modo al *drift* di agire durevolmente). Il grafico il cui andamento è riportato in figura 17 è stato ottenuto per una vita residua di tre mesi e per un tasso del 4% (le altre condizioni sono le stesse della figura 16).

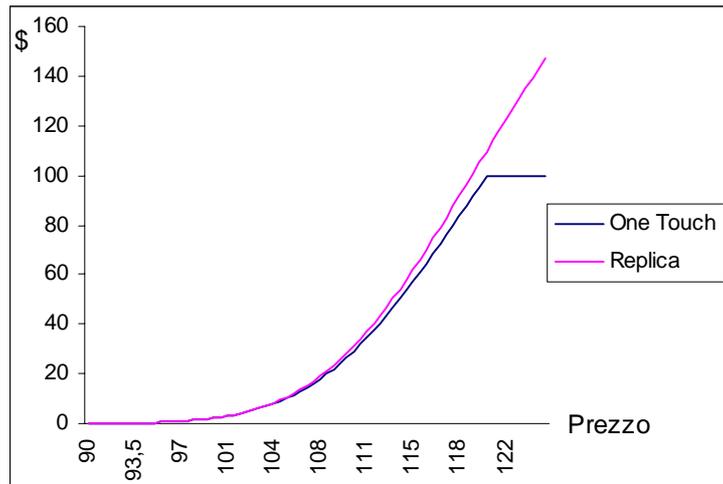


Figura 17 - *Deferred up and in* e replica in presenza di *drift* non nullo ($r=4\%$ e $t=3$ mesi)

Il *drift* positivo, aumentando la probabilità che il prezzo finisca al di là della barriera, provoca un incremento nel valore delle *digital* europee che a sua volta ha come ovvia conseguenza un valore della replica costantemente superiore a quello della binaria americana.

È possibile tuttavia ovviare al problema *drift* per mezzo di semplici tecniche numeriche: ad esempio possiamo modificare pesantemente la replica sopra utilizzata sostituendo l’acquisto di *B/H vanilla call* (con *strike* uguale alla barriera) con la vendita di 1,2726 *call* dotate di *strike* fissato a quota 118,388\$ (le cifre in questione sono state ottenute utilizzando una tecnica di minimizzazione della somma degli scostamenti quadratici tra replica e *digital*). La figura 18 offre una riprova visibile del miglioramento ottenuto.

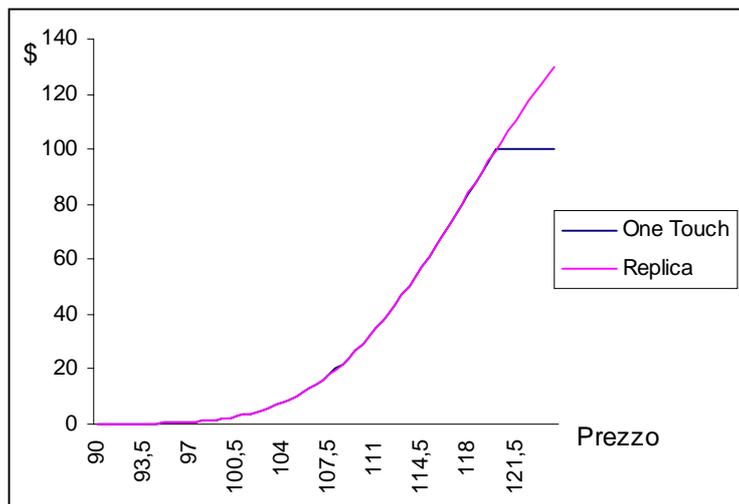


Figura 18 - *Deferred up and in* e replica modificata tramite tecniche numeriche (inoltre $r=4\%$ e $t=3$ mesi)

La replica così modificata si dimostra efficace nel mimare il comportamento della *One Touch* non solo per il momento in cui viene realizzata: essa mantiene infatti un livello accettabile di performance anche al ridursi progressivo della vita residua (a patto che il tasso non subisca

variazioni di notevole entità), con l'avvertenza consueta di procedere al tempestivo smobilizzo della copertura al raggiungimento della barriera.

Appendice Matematica

Le Immediate American Digital

Il valore di una *immediate american digital* è dato, come indicato nel testo, dalla seguente espressione:

$$V = \int_0^t e^{-r\tau} B l(\tau) d\tau = B \int_0^t e^{-r\tau} l(\tau) d\tau$$

L'integrale definito da zero a t può essere risolto ponendo⁶ prima di tutto $z = 1/\tau$ (e quindi con $\tau' = -1/z^2$). Per la tecnica dell'integrazione per sostituzione abbiamo quindi:

$$V = B \int_0^t e^{-r\tau} \frac{h}{\sigma\sqrt{2\pi\tau^3}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(h-a\tau)^2}{\sigma^2\tau}} d\tau = B\theta h \int_{1/t}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi/z^3}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(h-a/z)^2}{\sigma^2/z} \frac{r}{z}} \left(-\frac{1}{z^2}\right) dz.$$

L'introduzione della variabile binaria θ (vale -1 per le *up-barrier* e $+1$ per le *down-barrier*) a questo punto dello sviluppo si rende necessaria per evitare un valore negativo dell'opzione. Per ora procediamo oltre mantenendo l'ipotesi di $h > 0$ (*up-barrier*); alla fine del paragrafo vedremo cosa accade per $h < 0$ (*down-barrier*). Ad ogni modo, semplificando l'integrale definito ottenuto in seguito alla sostituzione, abbiamo:

$$V = -B\theta h \int_{1/t}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi z}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(hz-a)^2 + 2\sigma^2 r}{\sigma^2 z}} dz,$$

sostituendo questa volta $y = \sqrt{z}$ otteniamo ($z' = 2y$):

$$\begin{aligned} V &= -B\theta h \int_{1/\sqrt{t}}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}y} e^{\left[-\frac{1}{2}\frac{h^2 y^4 + a^2 + 2\sigma^2 r}{\sigma^2 y^2} + \frac{ha}{\sigma^2}\right]} 2y dy = \\ &= -2B\theta h e^{ha/\sigma^2} \int_{1/\sqrt{t}}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\left[-\frac{1}{2}\frac{h^2 y^2 + (a^2 + 2\sigma^2 r)/y^2}{\sigma^2}\right]} dy. \end{aligned}$$

Posto $\psi = \sqrt{a^2 + 2\sigma^2 r}$ possiamo procedere oltre e scrivere:

$$V = -2B\theta h e^{ha/\sigma^2} \int_{1/\sqrt{t}}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{[hy-\psi/y]^2 + 2h\psi}{\sigma^2}} dy =$$

⁶ Lo sviluppo matematico che segue è tratto da Zhang (1997: 252-254).

$$= -2B\theta h \left(\frac{H}{S}\right)^{\frac{(a-\psi)}{\sigma^2}} \int_{1/\sqrt{t}}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \frac{[hy-\psi/y]^2}{\sigma^2}} dy.$$

Evidentemente tutto lo sviluppo fino ad ora portato avanti ha avuto il solo scopo di rendere la funzione da integrare strutturalmente analoga ad una distribuzione normale. Il passo successivo consiste ovviamente nel porre $x = hy - \psi/y$. Ciò evidentemente implica:

$$y = \frac{1}{2h} \left[x + \sqrt{x^2 + 4h\psi} \right]$$

(la radice negativa deve essere scartata per il semplice fatto che y deve essere sempre positivo) e quindi:

$$y' = \frac{1}{2h} \left[1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4h\psi}} \right].$$

Effettuando la sostituzione in questione otteniamo:

$$\begin{aligned} V &= -2B\theta h \left(\frac{H}{S}\right)^{\frac{a-\psi}{\sigma^2}} \int_{\frac{\left(\frac{h}{\sqrt{t}} - \psi\sqrt{t}\right) - 0}{\sigma}}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \frac{x^2}{\sigma^2}} \left[\frac{1}{2h} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4h\psi}} \right) \right] dx = \\ &= B \left(\frac{H}{S}\right)^{\frac{a-\psi}{\sigma^2}} \left\{ N \left[\frac{-h + \psi t}{\sigma\sqrt{t}} \right] + \int_{\frac{h-\psi t}{\sigma\sqrt{t}}}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4h\psi}} e^{-\frac{1}{2} \frac{x^2}{\sigma^2}} dx \right\}. \end{aligned}$$

L'ultimo integrale si risolve ponendo $s = \sqrt{x^2 + 4h\psi}$ e “trasformandolo” quindi nella seguente espressione:

$$\left(\frac{H}{S}\right)^{2\psi/\sigma^2} N \left[-\frac{h + \psi t}{\sigma\sqrt{t}} \right].$$

A questo punto occorre sottolineare come l'intervallo di integrazione che porta ad ottenere le due funzioni cumulate appena viste si “inverte” nel caso di un $h < 0$ (ovvero nel caso delle *down and in options*). È questa la ragione che porta ad introdurre la variabile binaria θ (che, come già rilevato, vale -1 per le *up-barrier* e $+1$ per le *down-barrier*) all'interno delle funzioni cumulate, ottenendo così la seguente formula di valutazione delle *immediate binary* in forma compatta:

$$V = B \left(\frac{H}{S}\right)^{q_1} N[\theta Q_1] + B \left(\frac{H}{S}\right)^{q_{-1}} N[\theta Q_{-1}]$$

$$\text{dove } \psi = \sqrt{a^2 + 2\sigma^2 r},$$

$$Q_v = \frac{\ln(H/S) + vt\psi}{\sigma\sqrt{t}} \quad (v = +1 \text{ oppure } -1),$$

$$q_v = \frac{a + v\Psi}{\sigma^2},$$

$\theta = -1$ per le *up-barrier* ($h > 0$), $\theta = +1$ per le *down-barrier* ($h < 0$).

