

# *ALEA*

## *Tech Reports*

---

Capire la volatilità  
con il modello binomiale

Luca Erzegovesi

Tech Report Nr. 4  
Luglio 1999

---

**Alea - Centro di ricerca sui rischi finanziari**  
Dipartimento di informatica e studi aziendali  
Università di Trento - Via Inama 5 - 38100 - Trento  
<http://www.cs.unitn.it/>

*ALEA, Centro di ricerca sui rischi finanziari è un centro di ricerca indipendente costituito presso il Dipartimento di informatica e studi aziendali dell'Università di Trento. Il centro si propone di elaborare conoscenze innovative in materia di risk management, e di favorirne la diffusione mediante pubblicazioni e programmi di formazione. Il centro è diretto dal prof. Luca Erzegovesi. Nella collana ALEA Tech Reports sono raccolti lavori di compendio e rassegna della letteratura e della prassi operativa su tematiche fondamentali di risk management.*

Luca Erzegovesi (\*)

# Capire la volatilità con il modello binomiale

## Abstract

*Questo lavoro si propone di illustrare i concetti basilari dell'arbitrage pricing degli strumenti finanziari derivati mediante semplici modelli a tempo discreto che non richiedono nozioni di calcolo differenziale. In particolare si analizzano le proprietà statistiche dei prezzi e dei ritorni finanziari (valore atteso, varianza, deviazione standard) con riferimento alle distribuzioni "vera" e neutrale al rischio. Si sottolinea la mutua dipendenza tra praticabilità della strategia di replica autofinanziante di uno strumento derivato e possibilità di definire una ragionevole distribuzione neutrale al rischio dal processo del sottostante. Si evidenzia come la volatilità implicita nel prezzo delle opzioni sia una misura del compenso equo per i costi delle strategie di replica e, al tempo stesso, valendo le ipotesi limitative dei modelli canonici, una stima della volatilità attesa della vera distribuzione.*

(\*) Professore ordinario di Gestione finanziaria e valutaria, Università di Trento. Direttore di ALEA, Centro di ricerca sui rischi finanziari.



# Introduzione

*Questo paper è nato come testo di consultazione ad uso di un gruppo di ricerca interdisciplinare sul tema “Nuovi modelli di analisi della volatilità nei mercati finanziari”. E’ stato scritto con l’intento di fissare alcuni concetti fondamentali, utilizzando un linguaggio comune tra economisti aziendali, matematici, statistici e informatici. Si è voluto fornire un compendio delle nozioni statistiche sottostanti ai più semplici modelli di pricing dei derivati a tempo discreto che fosse formalmente rigoroso ed accessibile partendo da conoscenze matematiche elementari. La trattazione s’ispira, nel taglio dato ai contenuti, ai più popolari libri in materia di derivati scritti da economisti finanziari, come Cox e Rubinstein (1985) e Hull (1997), ma raccoglie spunti anche dalla letteratura più recente in materia di calcolo stocastico come il testo accessibile di Baxter e Rennie (1996) o manuali formalmente più rigorosi, come Karatzas e Shreve (1998).*

*Il paper è diviso in tre capitoli. Nel primo si introducono i processi stocastici dei prezzi e dei ritorni finanziari partendo dal caso “atomico” di un processo uniperiodale composto da un unico movimento e due stati futuri. Dalle ipotesi sui possibili prezzi e sulle rispettive “vere” probabilità si ricavano il valore atteso e la varianza dei prezzi e dei ritorni. Si introduce quindi la distribuzione di probabilità neutrale al rischio, ottenuta vincolando il valore atteso del prezzo al livello iniziale del forward, e se ne evidenziano le differenze rispetto alla vera distribuzione. Si ha così modo di fissare i concetti di cambio di misura e di titoli contingenti (Arrow-Debreu securities). Sempre nel caso uniperiodale, si illustra la replica di contratti derivati in assenza di rischio mediante posizioni di copertura su contratti a termine, mettendo in luce il parallelismo tra costo di replica del derivato e suo valore atteso risk neutral, così come tra praticabilità della copertura e definizione di una distribuzione risk neutral con probabilità corrette. I prezzi di mercato dei derivati con payoff non lineare sono utilizzati per estrarre la distribuzione di probabilità del prezzo del sottostante e la relativa volatilità implicita.*

*Nel secondo capitolo si considera la distribuzione di ritorni su orizzonti che comprendono una successione di movimenti uniperiodali, o passi, ipotizzati indipendenti e identicamente distribuiti. La volatilità dei ritorni si dimostra scalabile rispetto al periodo di rilevazione in base alla regola della radice quadrata del tempo. Si confrontano poi i comportamenti della forma e dei momenti delle distribuzioni, vera e risk neutral, all’aumentare del numero di passi e al diminuire della relativa durata. Entrambe le distribuzioni convergono verso una forma normale, con varianza uguale nei due casi e diverso valore atteso, evidenziando ancora il fenomeno del cambio di misura.*

*Nel terzo capitolo si imposta il problema della copertura dinamica dei derivati rispetto a una successione di movimenti di prezzo estratti, come prima ipotizzato, da una distribuzione binomiale stazionaria. Vengono tracciate le “mappe” ad albero su cui si muovono i prezzi e da queste si ricavano le corrispondenti mappe dei rapporti di copertura e del valore di equilibrio dei derivati. Viene ribadita l’interdipendenza tra la praticabilità della copertura dinamica e la possibilità di calcolare ragionevoli probabilità risk neutral lungo i nodi dell’albero. La strategia di replica si dimostra autofinanziante.*

*Le conclusioni riassumono i risultati raggiunti e prospettano i passi successivi di un percorso formativo in materia di analisi della volatilità.*

*Nella stesura si è cercato di utilizzare un linguaggio rigoroso e, nel contempo, di semplificare al massimo la strumentazione matematica, cosa che ci è consentito di fare nel mondo a tempo discreto. Sono infatti presupposte soltanto conoscenze elementari di calcolo delle probabilità e di analisi matematica, oltre a una minima familiarità con le caratteristiche contrattuali dei contratti a termine e delle opzioni. Per risparmiare tempo e fatica ai lettori più meticolosi abbiamo riportato in nota o in apposita appendice le dimostrazioni di alcune formule, ancorché molto lineari.*

*L'autore ha il gradito dovere di ringraziare Nicola Rovea e Rita Semenzato, che hanno collaborato all'elaborazione del testo per la pubblicazione, contribuendo a emendare diversi refusi presenti nel manoscritto. Ovviamente rimane totalmente a suo carico la responsabilità di eventuali errori e inesattezze nella versione finale.*

# Indice

<b>Introduzione .....</b>	<b>i</b>
<b>Capitolo 1 - Distribuzione binomiale a un periodo .....</b>	<b>1</b>
1.1 <i>Profilo contrattuale delle opzioni</i> .....	1
1.2 <i>Ragioni dell'analisi in tempo discreto</i> .....	2
1.3 <i>La distribuzione binomiale a un periodo</i> .....	3
1.4 <i>Dai parametri di costruzione ai momenti delle distribuzioni</i> .....	4
1.4.1 <i>La distribuzione dei prezzi</i> .....	4
1.4.2 <i>La distribuzione dei ritorni</i> .....	4
1.5 <i>Calibratura dei parametri dell'albero dati i momenti della distribuzione dei ritorni</i> .....	5
1.6 <i>Il ritorno sul prezzo atteso (drift)</i> .....	7
1.7 <i>Il vincolo di distribuzione risk neutral</i> .....	9
1.8 <i>Probabilità risk neutral e copertura: strumenti con payoff lineare</i> .....	12
1.9 <i>Probabilità risk neutral e copertura: strumenti con payoff non lineare</i> .....	16
1.10 <i>Probabilità risk neutral e prezzo dei titoli Arrow-Debreu</i> .....	19
1.11 <i>Dai prezzi dei derivati alla volatilità implicita</i> .....	20
<b>Capitolo 2 - Processi binomiali multiperiodo .....</b>	<b>25</b>
2.1 <i>Alberi a n periodi</i> .....	25
2.2 <i>Relazione tra momenti della distribuzione e durata dello step</i> .....	36
2.3 <i>Estensione alle distribuzioni forward</i> .....	42
<b>Capitolo 3 - Valutazioni con alberi binomiali multiperiodo .....</b>	<b>47</b>
3.1 <i>Valutazioni con alberi multiperiodo</i> .....	47
3.2 <i>Primo livello: principiante</i> .....	48
3.2.1 <i>Gli alberi binari: geometria e regole di navigazione</i> .....	48
3.2.2 <i>Replica e arbitraggio su n-periodi</i> .....	55
3.3 <i>Secondo livello: apprendista</i> .....	63
3.3.1 <i>L'arbitrage pricing: definizioni basilari</i> .....	63
3.3.2 <i>Il processo dell'aspettativa condizionata di un claim</i> .....	67
3.3.3 <i>Teorema della rappresentazione binomiale</i> .....	67
3.3.4 <i>Conclusioni sull'arbitrage pricing in condizioni di mercato ideali</i> .....	69
<b>Conclusioni .....</b>	<b>71</b>
<b>Bibliografia .....</b>	<b>73</b>



# Capitolo 1 - Distribuzione binomiale a un periodo

In questo capitolo presentiamo il modello più semplice per la valutazione degli strumenti derivati: la distribuzione binomiale a un periodo. Per rappresentare i movimenti del prezzo del titolo ci serviamo di un **albero binomiale**, che specifica tutti i possibili prezzi futuri del titolo e le relative probabilità. Mostreremo come usare l'albero binomiale per rappresentare il comportamento aleatorio dei prezzi e, quindi, per valutare le opzioni.

## 1.1 Profilo contrattuale delle opzioni

Prima di affrontare i modelli offriamo un breve riepilogo del **profilo contrattuale** delle opzioni.

- Le **opzioni** sono strumenti finanziari derivati utilizzati dagli operatori per finalità speculative e di gestione del rischio. Oggetto del contratto di opzione è l'acquisto di una facoltà da parte dell'*holder* a fronte del trasferimento del rischio sul *writer*; infatti le opzioni sono contratti di compravendita a termine (con esecuzione differita), che lasciano all'*holder* la facoltà di recesso o di abbandono.

Gli elementi caratteristici di un'opzione sono:

1. la presenza di **due controparti**: l'*holder* (il detentore dell'opzione) ed il *writer* (l'emittente dell'opzione);
2. l'acquisizione di una **facoltà** da parte dell'*holder* (di acquisto nel caso di un'opzione *call*, di vendita nel caso di un'opzione *put*);
3. il prezzo di esercizio (**strike price**): prezzo al quale la compravendita è eseguita (condizione fissata al momento della stipulazione del contratto di opzione);
4. la **scadenza**;
5. il **premio** pagato dall'*holder* al *writer* per l'acquisto della facoltà;
6. lo stile:
  - a) opzioni **europee**: l'*holder* può esercitare il contratto o recedere solo alla scadenza;
  - b) opzioni **americane**: l'*holder* può esercitare il contratto entro la data di scadenza (in un giorno qualsiasi tra la stipulazione e la data di scadenza).

Il valore di un'opzione alla scadenza, in un mercato efficiente, è pari al suo *payoff*. Il *payoff*, per l'*holder* di un'opzione *call*, è pari a:

$$\max [0 ; (\text{prezzo spot dell'attività sottostante alla data di scadenza dell'opzione} - \text{strike})];$$

per l'*holder* di un'opzione *put* è:

$\max [0 ; (\textit{strike} - \textit{prezzo spot dell'attività sottostante alla data di scadenza dell'opzione})]$ .

Il problema consiste nel determinare quanto vale un'opzione prima della scadenza (se il prezzo dell'attività sottostante è una variabile aleatoria). Tale problema è risolto, nel caso più semplice, dal modello binomiale a un periodo.

## 1.2 Ragioni dell'analisi in tempo discreto

Accettiamo come ipotesi che i prezzi finanziari si comportino come variabili casuali analizzabili con il calcolo delle probabilità. In questo caso le variazioni dei prezzi si ipotizzano generate da un motore aleatorio che specchia una specifica distribuzione di probabilità.

- Le **distribuzioni discrete** assumono un numero finito di valori possibili della variabile aleatoria e specificano per ciascuno di essi una probabilità di accadimento.

Nel caso dei prezzi, partendo dalla quotazione odierna, si può individuare una distribuzione discreta dei prezzi a una certa data futura come insieme finito dei possibili prezzi e delle rispettive probabilità. Tale rappresentazione, pur nella sua semplicità, evidenzia le proprietà fondamentali del comportamento dei prezzi che rilevano ai nostri fini.

Per esigenze di praticità in finanza si preferisce utilizzare (in tempo discreto e in tempo continuo) **distribuzioni parametriche**, nelle quali l'associazione tra i valori possibili dei prezzi e le probabilità di accadimento è rappresentata con funzioni matematiche compatte, che specificano alcuni parametri di costruzione. Tramite le distribuzioni parametriche è semplice ricavare con appositi algoritmi i momenti della distribuzione (media, varianza, asimmetria, curtosi). Le distribuzioni binomiali, sulle quali si basa la nostra trattazione, sono distribuzioni discrete di tipo parametrico.

Rispetto alle distribuzioni nel continuo, che danno misure più fini e sono meglio trattabili analiticamente, quelle nel discreto hanno due pregi: richiedono un apparato matematico limitato al calcolo aritmetico ed hanno proprietà statistiche ricavabili con nozioni elementari di calcolo delle probabilità. Potremo così (1) spiegare il valore atteso e la volatilità dei prezzi e dei ritorni (rendimenti) in modo semplice e plausibile, (2) facilitare la comprensione dei modelli a tempo continuo e (3) fornire le nozioni tecniche per costruire alberi binomiali applicabili al *pricing* delle opzioni. Quest'ultimo punto è propedeutico all'analisi della struttura delle volatilità implicite, che viene approfondito in altri *Report* di questa collana di prossima pubblicazione.

In definitiva, è utile acquisire familiarità e "manualità" con i modelli a tempo discreto, impagabili strumenti formativi e di analisi; essi consentono di "fermare l'immagine" su specifici stati futuri, e quindi possono essere applicati ai casi in cui la valutazione dipende non soltanto dai prezzi finali, ma anche da eventi che si verificano durante la vita di un'operazione finanziaria e dalle decisioni prese di conseguenza dal detentore. In molti casi i modelli binomiali (o loro estensioni) sono gli unici efficaci per valutare strumenti "dipendenti dal percorso". Essi inoltre sono una palestra per la progettazione di modelli relativi a forme contrattuali "esotiche", che possono essere successivamente affinati e riformulati nel continuo.

L'applicazione di modelli a tempo discreto al *pricing* delle opzioni ha segnato una svolta negli studi sulla materia dando origine a una nuova famiglia di modelli e, soprattutto, aprendo la strada verso la comprensione intuitiva della formula nel continuo di Black e Scholes<sup>1</sup>. Il modello binomiale a più periodi di Cox, Ross e Rubinstein (1979) è lo standard per il *pricing* delle opzioni americane grazie alla possibilità di simulare al suo interno la decisione di esercizio anticipato. Volendo risalire a precedenti illustri, si può ricordare che il primo esempio di stima del valore di un'operazione aleatoria utilizza una distribuzione discreta; si tratta della soluzione al problema riguardante la divisione della posta in un gioco di fortuna (la *balla*) che venga interrotto a metà. Il filosofo Blaise Pascal riuscì a calcolare le probabilità

<sup>1</sup> Come riconosciuto in Cox e Rubinstein (1985:166), l'applicazione del modello binomiale alle opzioni si deve a una geniale intuizione avuta da William Sharpe, co-ideatore del *Capital Asset Pricing Model*.

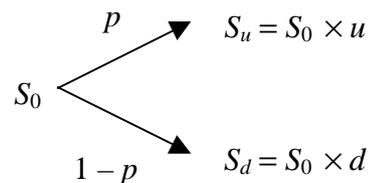
di vincita di ciascun giocatore dato l'esito delle mani precedenti mediante l'ingegnoso triangolo che porta il suo nome<sup>2</sup>, formulando così la distribuzione binomiale.

Rispetto a molta letteratura in materia adottiamo una prospettiva differente: l'enfasi non è tanto sulla copertura e sul *pricing* di contratti derivati, quanto sulle proprietà delle distribuzioni dei prezzi e dei ritorni. Mettiamo quindi in primo piano aspetti altrimenti strumentali, come la calibratura dei parametri dell'albero in funzione di vincoli di media e varianza.

### 1.3 La distribuzione binomiale a un periodo

La distribuzione binomiale è come un gioco di costruzioni: partendo da mattoncini e da regole di montaggio semplici, consente di costruire distribuzioni molto articolate. Il blocchetto elementare è dato dalla distribuzione a un periodo, che prevede un valore al tempo iniziale dal quale si possono raggiungere due stati reciprocamente esclusivi dopo un intervallo temporale (*step*) di durata uniperiodale. Ai due possibili stati futuri sono associate delle probabilità la cui somma è uno.

Consideriamo un caso concreto: l'evoluzione del prezzo *spot* di un'attività finanziaria infruttifera. Si supponga che al termine di un intervallo di tempo i possibili stati del mondo siano soltanto due: un rialzo e un ribasso rispetto al prezzo corrente di entità misurata rispettivamente dai fattori di variazione  $u$  e  $d$ <sup>3</sup>; attribuiamo al rialzo probabilità  $p$  e probabilità  $(1 - p)$  al caso di ribasso. Indicando con  $S_0$  il prezzo iniziale del titolo e con  $S_u$  e  $S_d$  i prezzi finali in caso di rialzo e di ribasso, la distribuzione può essere descritta mediante una semplice rappresentazione grafica:



*Come si chiarisce in seguito (si veda oltre 1.8), per rispettare la condizione di assenza di arbitraggi profittevoli i valori di  $S_u$  e  $S_d$  devono essere rispettivamente, superiori e inferiori rispetto al prezzo corrente a termine (quest'ultimo è spiegato dal prezzo a pronti  $S_0$  e dal tasso di riporto netto). Invece non deve essere necessariamente rispettata la stessa relazione tra  $S_u$  e  $S_d$  e il prezzo a pronti. Pertanto, non necessariamente rialzo significa  $u > 1$  e ribasso  $d < 1$ . Negli esempi che seguono verrà peraltro rispettata tale condizione più ristretta per fugare eventuali perplessità del lettore.*

L'albero è chiamato albero binario o binomiale perché il prezzo *spot* può soltanto aumentare o diminuire in corrispondenza della data finale. Dato il valore di  $S_0$ , i parametri di costruzione sono tre ( $u$ ,  $d$  e  $p$ ).  $u$  e  $d$  devono essere calibrati in relazione alla durata dello *step*. La coppia di frecce che congiungono lo **stato** (o **nodo**) iniziale ai due stati finali che da esso derivano è un **ramo** dell'albero binomiale (in questo caso abbiamo un unico ramo). Al crescere del numero dei periodi, aumenta il numero di rami. L'albero del prezzo a fine *step* descrive una variabile aleatoria il cui valore dipende dal trascorrere del tempo e da un fattore casuale. Tale descrizione comprende due elementi:

- il **processo** del prezzo, dato dall'insieme dei possibili valori del titolo e dal loro reticolo di interconnessioni;
- la **misura** di probabilità, cioè l'insieme delle probabilità di rialzo/ribasso definite per i movimenti da ogni nodo (esclusi quelli "terminali") ai due nodi discendenti.

<sup>2</sup> Si veda oltre 3.2.

<sup>3</sup> I simboli  $u$  e  $d$  stanno per *up* e *down*.

La distribuzione binomiale a un periodo è una distribuzione ridotta all'osso, che pochi accetterebbero per rappresentare le proprie aspettative sui prezzi futuri (potrebbe al più valere su un orizzonte brevissimo, quale il tempo tra due operazioni consecutive concluse sul mercato). Per il momento, e per i nostri fini, è un punto di partenza del tutto soddisfacente: infatti non le manca nessuna delle proprietà fondamentali di una distribuzione statistica. Essa ci fornisce inoltre una rappresentazione plausibile della variazione del prezzo su intervalli brevissimi. Il prezzo potrà essere realisticamente modellato su intervalli più estesi considerando una successione di variazioni uniperiodali come questa.

Nell'esposizione partiremo dall'analisi della “vera” *distribuzione* dei prezzi/ritorni, ipotizzando di avere perfetta conoscenza dei fondamentali del mercato; esamineremo poi una *distribuzione neutrale al rischio* ottenuta cambiando la misura di probabilità, ponendo un ulteriore vincolo di valore atteso del prezzo.

## 1.4 Dai parametri di costruzione ai momenti delle distribuzioni

### 1.4.1 La distribuzione dei prezzi

Il valore atteso (media) e le misure di dispersione di una distribuzione binomiale a un periodo si determinano nel modo seguente:

- il **valore atteso** è dato dalla media ponderata dei possibili valori dei prezzi per le rispettive probabilità di accadimento:

$$E(S) = S_0 u p + S_0 d (1 - p)$$

- la **varianza** è la media ponderata dei quadrati degli scarti dalla media per le rispettive probabilità:

$$v_s^2 = [S_0 u - E(S)]^2 p + [S_0 d - E(S)]^2 (1 - p)$$

- la **deviazione standard** si ricava come radice quadrata della varianza:

$$v_s = \sqrt{v_s^2}$$

### 1.4.2 La distribuzione dei ritorni

Le variabili aleatorie trattate in finanza dai modelli canonici non sono di tipo assoluto (come il prezzo o le sue variazioni assolute nel tempo), ma sono tassi di variazione relativa. Si ritiene infatti che i tassi di variazione dei prezzi abbiano media e varianza più stabili rispetto ai livelli o alle differenze assolute, che si presumono di norma collegati con il livello corrente del prezzo (variazioni più pronunciate sono più probabili con prezzi alti, e viceversa). Per una migliore trattabilità matematica nel continuo, i tassi di variazione sono espressi come tassi istantanei o logaritmici.

- Si definisce **ritorno sul prezzo** del sottostante il logaritmo naturale del rapporto tra il prezzo rilevato al termine dello *step* e il prezzo iniziale.

Per un albero binomiale a un periodo si hanno due ritorni possibili (simbolo  $h$ ):

$$S_0 e^{h_u} = S_0 u \Rightarrow h_u = \ln \frac{S_0 u}{S_0} = \ln(u) \quad \text{caso di rialzo del prezzo}$$

$$S_0 e^{h_d} = S_0 d \Rightarrow h_d = \ln \frac{S_0 d}{S_0} = \ln(d) \quad \text{caso di ribasso del prezzo}$$

Fondamentale è quindi il riferimento alla distribuzione dei ritorni, che si sovrappone a quella dei prezzi. Le due distribuzioni hanno in comune l'insieme di eventi possibili e le relative probabilità, mentre si differenziano per la metrica della variabile aleatoria sottostante. In altre parole, le distribuzioni dei prezzi e dei ritorni sono "mappate" l'una sull'altra.

Pertanto, anche i ritorni seguono una distribuzione binomiale, le cui proprietà sono:

- **valore atteso:**  $E(h) = \ln(u)p + \ln(d)(1-p)$
- **varianza:**  $v_h^2 = [\ln(u) - E(h)]^2 p + [\ln(d) - E(h)]^2 (1-p)$
- **deviazione standard:**  $v_h = \sqrt{v_h^2}$

La volatilità su cui normalmente si ragiona è la volatilità dei ritorni. Pertanto, per semplicità di notazione, indichiamo d'ora in avanti la volatilità dei ritorni con il simbolo  $v$ .

*Tassi di ritorno e volatilità sono riferiti a un periodo unitario pari alla lunghezza dello step, che dipende dai parametri di costruzione dell'albero; più avanti utilizzeremo misure riferite ad un'unità temporale standard (di solito l'anno). Ritorni e volatilità annue saranno indicati con lettere greche ( $\xi$  e  $\sigma$ ), mentre per le analoghe grandezze uniperiodali impieghiamo lettere latine ( $h$  e  $v$ ).*

## 1.5 Calibratura dei parametri dell'albero dati i momenti della distribuzione dei ritorni

Le distribuzioni binomiali sono per noi una palestra per lo studio dei processi nel continuo. E' quindi importante fissare delle regole di calibratura dei parametri dell'albero ( $p$ ,  $u$  e  $d$ ) tali da produrre distribuzioni con valori predeterminati di valore atteso e varianza. Nel caso considerato si osservano due processi, tra loro sovrapposti: quello del prezzo  $S$  e quello del ritorno  $h$ . Poiché i modelli di *pricing* standard utilizzati in finanza fanno riferimento normalmente alla varianza dei ritorni (assunta costante o con una dinamica più facile da modellare), porremo come vincoli da rispettare proprio i momenti della distribuzione dei ritorni, ovvero  $E(h)$  e  $v$ .

Possiamo determinare i parametri dell'albero risolvendo un sistema di equazioni. Le incognite ( $p$ ,  $u$  e  $d$ ) sono in numero superiore ai vincoli posti [ $E(h)$  e  $v$ ]; per rendere il sistema risolvibile dobbiamo aggiungere un terzo vincolo, di natura pratica, relativo al bilanciamento dei valori di prezzo evidenziati nell'albero. Questo vincolo individua la distanza relativa tra i prezzi nei due stati  $u$  e  $d$ . Negli alberi a  $n$  periodi, esso determina il valore assunto dal ritorno, quindi dal prezzo, nei nodi "centrali", ovvero quelli posti lungo l'asse di simmetria dell'albero. Questo terzo vincolo può essere specificato in vari modi; la regola che proponiamo implica che, partendo da un prezzo iniziale al tempo  $i$  pari a  $S_i$ , il ritorno dopo due passi consecutivi segnati da *shock* di segno opposto ( $u$  seguito da  $d$  oppure  $d$  seguito da  $u$ ) debba coincidere con il doppio del ritorno atteso uniperiodale, ovvero, come si vedrà, col ritorno atteso biperiodale. Si ricava il vincolo:

$$u \times d = e^{E(h) \times 2} \Rightarrow d = \frac{e^{E(h) \times 2}}{u}$$

A differenza del classico modello binomiale di Cox, Ross e Rubinstein (1979), che prevede il vincolo  $u \times d = 1$ , qui i prezzi non ritornano al loro livello di partenza dopo due movimenti consecutivi di segno opposto. La regola specificata ha il vantaggio di essere generalizzabile per tutti i processi (*spot* e *forward*); essa consente inoltre, come vedremo, di utilizzare valori di probabilità equilibrati nei due casi di rialzo/ribasso.

Otteniamo il seguente sistema con tre equazioni e tre incognite:

$$\begin{cases} h_u p + h_d(1-p) = E(h) \\ [h_u - E(h)]^2 p + [h_d - E(h)]^2 (1-p) = v^2 \\ u d = e^{2E(h)} \end{cases}$$

Lavorando sulla vera distribuzione non sottostiamo a vincoli particolari che condizionino le probabilità; possiamo quindi eliminare l'incognita  $p$  attribuendo uguale probabilità ai due casi (rialzo e ribasso), fissando  $p = 0,5$ . Questo espediente ci piace non solo per ragioni estetiche, ma soprattutto perché semplifica molto la determinazione di  $u$  e  $d$  nel rispetto del vincolo di ritorno atteso; infatti, adottando pesi uguali, per ottenere una media pesata pari a  $E(h)$  è sufficiente assumere una coppia di ritorni pari a:

$$\begin{aligned} h_u &= a + b \\ h_d &= a - b \end{aligned}$$

dove  $a$  è un termine comune ai due stati (rialzo e ribasso), mentre  $b$  è un fattore di rumore o perturbazione del processo.

Essendo i pesi pari a 0,5, nel calcolo del ritorno atteso i termini  $b$  pesati si compensano. Per soddisfare il vincolo di ritorno atteso basta porre  $a = E(h)$ .

A questo punto è ancora più semplice risolvere la seconda equazione. Essendo gli scarti dalla media dei ritorni (che coincide con  $a$ ) pari a  $+b$  e  $-b$ , la media pesata dei relativi quadrati ( $v^2$ ) risulta essere uguale a  $b^2$  per qualsiasi valore di  $p$ . L'equazione è risolta per  $b = v$  <sup>(4)</sup>.

Con l'impostazione data viene risolta anche la terza equazione del sistema. Infatti:

$$u \times d = e^{2E(h)} = e^{2\left[(a+b)\frac{1}{2} + (a-b)\frac{1}{2}\right]} = e^{(a+b)+(a-b)} = e^{a+b} e^{a-b} = e^{2a}$$

risolta per:  $a = E(h)$

Riepilogando: otteniamo le seguenti soluzioni:

$$\begin{aligned} p &= 0,5 \\ u &= e^{a+b} \\ d &= \frac{e^{2a}}{u} = e^{a-b} \end{aligned}$$

con  $a = E(h)$  e  $b = v$ .

**Esempio.** Sia il prezzo corrente di un titolo sottostante a un'opzione  $S_0 = 1$   
 $v = 11\%$   
 $E(h) = 6\%$   
 Costruiamo l'albero binomiale a un periodo.  
 Determiniamo i valori dei parametri strutturali ( $u$ ,  $d$  e  $p$ ):

---

<sup>4</sup> Riportiamo la dimostrazione:

$$\begin{aligned} [(a+b)-a]^2 p + [(a-b)-a]^2 (1-p) &= v^2 \\ b^2 p + b^2 (1-p) &= v^2 \\ b^2 (p+1-p) &= v^2 \\ b^2 &= v^2 \Rightarrow b = v \end{aligned}$$

$$u = e^{E(h)+v} = e^{0,06+0,11} = 1,1853$$

$$d = e^{E(h)-v} = e^{0,06-0,11} = 0,9512$$

$$p = 0,5$$

Calcoliamo i due possibili prezzi futuri:

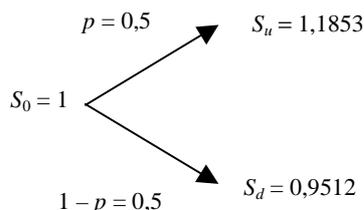
$$S_u = S_0 \times u = 1 \times 1,1853 = 1,1853$$

$$S_d = S_0 \times d = 1 \times 0,9512 = 0,9512$$

Il prezzo atteso è uguale a:

$$E(S) = S_u p + S_d (1 - p) = 1,1853 \times 0,5 + 0,9512 \times (1 - 0,5) = 1,0683$$

Rappresentiamo graficamente l'albero:



## 1.6 Il ritorno sul prezzo atteso (*drift*)

Da un albero calibrato in base a vincoli sui ritorni abbiamo determinato i prezzi nei due stati e il prezzo atteso. Possiamo calcolare il ritorno corrispondente a un prezzo finale pari a  $E(S)$ : si tratta, come vedremo, di un attributo interessante della distribuzione dei prezzi, sebbene qui tale ritorno non si ottenga in nessuno dei casi che si possono verificare lungo l'albero. Indichiamo con il simbolo  $m$  il ritorno sul prezzo atteso (o tasso di *drift*). Per un generico processo con struttura dei ritorni  $(a + b)$  e  $(a - b)$ , ricaviamo la seguente formula:

$$m = \ln \left[ \frac{E(S)}{S_0} \right] = \ln \left[ \frac{S_0 e^{a+b} p + S_0 e^{a-b} (1-p)}{S_0} \right]$$

Semplificando e sostituendo  $p$  con  $0,5$ ,  $a$  con  $E(h)$  e  $b$  con  $v$ , otteniamo<sup>5</sup>:

$$m = E(h) + \ln \left[ 0,5(e^v + e^{-v}) \right]$$

che rendiamo meglio interpretabile derivando rispetto a  $v$  ed espandendo in serie di Taylor per  $v = 0$  fino al secondo ordine (per ottenere una formula approssimata di  $m$ ):

$$m \approx E(h) + \frac{v^2}{2} \quad (6)$$

<sup>5</sup> Riportiamo la dimostrazione:

$$\begin{aligned} m &= \ln \left[ \frac{S_0 e^{E(h)+v} \times 0,5 + S_0 e^{E(h)-v} \times 0,5}{S_0} \right] = \ln \left[ \frac{S_0 \times 0,5 \times (e^{E(h)+v} + e^{E(h)-v})}{S_0} \right] \\ &= \ln \left[ 0,5(e^{E(h)} e^v + e^{E(h)} e^{-v}) \right] = \ln \left[ 0,5 e^{E(h)} (e^v + e^{-v}) \right] = \ln e^{E(h)} + \ln \left[ 0,5(e^v + e^{-v}) \right] \\ &= E(h) + \ln \left[ 0,5(e^v + e^{-v}) \right] \end{aligned}$$

<sup>6</sup> Ciò si dimostra con i seguenti passaggi. Se definiamo:

Ovviamente, invertendo la formula si ottiene la seguente relazione tra il valore atteso del ritorno  $[E(h)]$  e il ritorno calcolato sul prezzo atteso ( $m$ ):

$$E(h) \approx m - \frac{v^2}{2}$$

Si dimostra che il ritorno atteso risulta inferiore al ritorno sul prezzo atteso, e tanto più quanto maggiore è la volatilità. Ciò consente di affermare che non solo il valore atteso del ritorno è sempre inferiore al ritorno sul prezzo atteso, ma anche che la differenza tra i due si può quantificare, in via approssimativa, come uguale alla metà della varianza dei ritorni. Nel caso multiperiodale, come si vedrà, la stessa relazione tende a valere in modo preciso.<sup>7</sup>

Questo risultato, la cosiddetta ineguaglianza di Jensen, potrebbe apparire controintuitivo, ma trova più di una spiegazione plausibile. Possiamo sbarazzarci della questione dicendo che è naturale che il logaritmo di un valore atteso di una variabile aleatoria non coincida con il valore atteso dei logaritmi delle sue osservazioni, essendo il logaritmo una funzione non lineare. Infatti, per determinare i fattori di *shock*  $u$  e  $d$ , si sono applicate delle perturbazioni pari a  $v$  uguali nei due casi, rispettivamente sommate e sottratte a  $E(h)$ . I tassi di ritorno logaritmico così ottenuti sono simmetrici rispetto al loro valore atteso che, dato  $p = 0,5$ , ne è pure la media semplice. Se abbiamo fatto valere una relazione simmetrica tra i ritorni e la loro media, la stessa non può valere per le differenze assolute dei prezzi rispetto al valore  $S_0 e^{E(h)}$ . A parità di scarto  $v$ ,  $S_u = S_0 e^{E(h)+v}$  si distanzia all'insù da  $S_0 e^{E(h)}$  più di quanto  $S_d = S_0 e^{E(h)-v}$  ne differisca all'ingiù. Si tratta di un'ovvia proprietà del montante in regime di tasso continuo, che è funzione esponenziale del tasso. Pertanto, il prezzo atteso  $E(S) \equiv S_0 e^m$ , che per  $p=0,5$  coincide con la media semplice di tali valori di prezzo si colloca a metà tra gli stessi, quindi a destra di  $S_0 e^{E(h)}$ . Ne risulta  $m > E(h)$ .

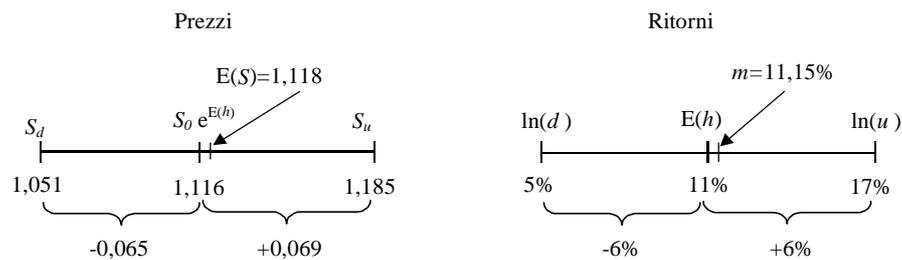
**Esempio.** Riprendiamo i dati dell'esempio precedente.

$$m = \ln \left[ \frac{E(S)}{S_0} \right] = \ln \left( \frac{1,1183}{1} \right) = 0,1118 = 11,18\%$$

approssimato da:

$$m \approx E(h) + \frac{v^2}{2} \approx 0,11 + \frac{0,06^2}{2} \approx 0,1118 \approx 11,18\%$$

Otteniamo la seguente rappresentazione grafica delle distribuzioni dei prezzi e dei ritorni:



$$f(v) = \ln \left[ 0,5(e^v + e^{-v}) \right]$$

avremo:

$$f'(v) = \frac{e^v - e^{-v}}{e^v + e^{-v}} \quad f''(v) = \frac{(e^v + e^{-v})^2 - (e^v - e^{-v})^2}{(e^v + e^{-v})^2} = 1 - \frac{(e^v - e^{-v})^2}{(e^v + e^{-v})^2}$$

Applichiamo la formula di Taylor per  $v_0=0$ :

$$f(0) = 0 \quad f'(0) = 0 \quad f''(0) = 1 \quad f(v) \approx f(0) + f'(0)(v-0) + \frac{f''(0)}{2!}(v-0)^2 \approx \frac{v^2}{2}$$

<sup>7</sup> Si veda oltre il paragrafo 2.2.

$$\begin{aligned}
S_0 e^{E(h)} &= 1 \times e^{0,11} = 1,116 \\
- 0,065 &= 1,051 - 1,116 \\
+ 0,069 &= 1,185 - 1,116 \\
E(S) &> S_0 e^{E(h)}
\end{aligned}$$

Come si può notare  $m > E(h)$ .

## 1.7 Il vincolo di distribuzione *risk neutral*

Fino ad ora abbiamo analizzato la “vera” distribuzione dei prezzi futuri. Anche ammettendo che tale distribuzione esista nella realtà e abbia parametri stazionari, non siamo in grado di osservarla, ma possiamo specificarla soltanto se si ipotizza informazione perfetta. In un mercato reale potremmo stimarla con delle previsioni soggettive. In alternativa possiamo costruire una distribuzione che utilizzi, almeno per il valore atteso del prezzo, un dato osservabile, ovvero le quotazioni *forward* vigenti, impiegate come previsioni implicite. Nel processo dei prezzi *spot*, se si assume un valore atteso del prezzo pari al prezzo *forward* di equilibrio ricavato al tempo iniziale,  $m$  è determinabile in base a dati di mercato certi e, precisamente, dalle quotazioni che influenzano il premio/sconto del *forward* rispetto allo *spot*.

Generalizzando il problema in base al modello del prezzo *forward* di strumenti che pagano un frutto continuo ad un tasso costante,  $m$  dovrà essere uguale alla differenza tra il tasso privo di rischio  $r$  e il tasso di “dividendo”  $y$  <sup>(8)</sup>. Su un orizzonte uniperiodale ciò equivale a porre il vincolo:

$$E(S) = F \text{ con } F \text{ (prezzo forward)} \equiv S_0 e^{r-y}$$

La precedente eguaglianza può essere così riscritta:

$$S_0 e^m = S_0 e^{r-y} \Rightarrow m = r - y$$

In caso di attività infruttifera ( $y = 0$ ) si avrà  $m = r$ . Per maggiore semplicità formuleremo un modello riferito ad attività infruttifere. I risultati che otterremo potranno essere estesi al caso di sottostante fruttifero sostituendo semplicemente a  $r$  la differenza tra  $r$  e  $y$ . Chiameremo **tasso di riporto netto**, o **tasso repo**, il tasso  $r$  che consente di ricavare il *forward* dallo *spot* e viceversa.

*Come si approfondisce più avanti nel processo dei prezzi forward il drift, sotto le stesse ipotesi, deve essere nullo, quindi  $m = 0$ ; nel processo dei prezzi spot il drift è nullo per  $r = y \neq 0$  o per  $r = y = 0$ , casi nei quali in ogni stato il forward per qualsiasi scadenza futura coincide con lo spot corrente.*

- Riepilogando, una **distribuzione neutrale verso il rischio** dei prezzi previsti a una data futura è caratterizzata da un valore atteso uguale al prezzo *forward*  $F$  vigente alla data iniziale per scadenza a tale data futura.

*Non è sempre chiaro il significato della definizione “neutrale al rischio” applicata a una distribuzione del genere. Possiamo giustificarla in tre modi: (1) è una distribuzione basata su parametri oggettivamente osservabili, quindi neutrale rispetto alle attese soggettive di chi valuta; (2) corrisponde alla situazione di equilibrio verso cui converge un mercato dominato da speculatori neutrali al rischio, che sono disposti ad assumere posizioni a termine quando il prezzo corrente si discosta anche di poco dal valore futuro atteso (non chiedono un margine di guadagno atteso “di sicurezza” quale premio al rischio), giudicando equivalente a certezza l’utile atteso anche se esposto al rischio del prezzo futuro<sup>9</sup>;*

<sup>8</sup> Il tasso di dividendo continuo corrisponde al tasso di interesse sulla valuta merce nel popolare modello del cambio a termine di equilibrio basato sulla parità coperta dei tassi di interesse. Per una rassegna delle formule di determinazione dei prezzi *forward* si rinvia a Erzegovesi (1997:cap.3).

<sup>9</sup> L’utile medio di operazioni speculative ripetute infinite volte in un mercato con distribuzioni dei ritorni stazionarie tende verso un valore certo per l’operare della legge dei grandi numeri; nella pratica sfruttare questa legge statistica per controllare i rischi non è realistico né prudente, come ben evidenziato in Baxter e Rennie (1996:4-9).

(3) corrisponde alla situazione di equilibrio per un operatore coperto (con posizione a pronti coperta da posizione di segno opposto a termine), che è neutrale al rischio in quanto protetto dallo stesso.

Vediamo come si modificano in questo caso i valori di  $p$ ,  $u$  e  $d$ , introducendo questo nuovo vincolo per  $m$ . Applicando la definizione al processo uniperiodale del prezzo di un titolo infruttifero, abbiamo:

$$S_0 e^m = S_0 e^r$$

Ciò implica un ritorno sul prezzo atteso ( $m$ ) pari al tasso di riporto netto ( $r$ ).

Costruire un albero *risk neutral* significa associare alle ipotesi di rialzo e ribasso un certo livello di probabilità  $q$ , affinché il valore atteso del prezzo *spot* a scadenza sia uguale al *forward* iniziale. Per un albero a un periodo la condizione è la seguente:

$$E(S) = S_u q + S_d (1 - q) = F$$

Ci si riferisce ad un mondo neutrale al rischio se la probabilità di rialzo è pari al valore  $q$ .  $q$  e  $(1 - q)$  sono delle *pseudoprobabilità*; esse infatti hanno le stesse caratteristiche di  $p$  e  $(1 - p)$ : sono associate ai due stati del mondo e la loro somma è uguale a 1. Il valore di  $q$ , a differenza di  $p$ , non necessariamente esprime particolari aspettative, ma assume un valore determinato in modo oggettivo; esso infatti si ricava dal prezzo *forward* di equilibrio e dal processo dei prezzi. Risolvendo per  $q$  l'equazione precedente e ricavando poi  $1 - q$ , si ottiene:

$$q = \frac{F - S_d}{S_u - S_d} \quad 1 - q = \frac{S_u - F}{S_u - S_d}$$

Riprendendo i dati dei due esempi precedenti determiniamo le probabilità *risk neutral*.

Assumendo un tasso di riporto  $r$  del 5%, otteniamo il prezzo a termine:

$$F = 1 \times e^{0.05} = 1,0513$$

Ricaviamo le pseudo probabilità:

$$q = \frac{F - S_d}{S_u - S_d} = \frac{1,0513 - 0,9512}{1,1853 - 0,9512} = 0,43$$

$$1 - q = \frac{S_u - F}{S_u - S_d} = \frac{1,1853 - 1,0513}{1,1853 - 0,9512} = 0,57$$

La pseudoprobabilità di rialzo  $q$  risulta inferiore alla corrispondente vera probabilità  $p$  poiché il valore atteso *risk neutral* che ne deriva deve essere uguale al *forward*  $F=1,0513$ , che è a sua volta inferiore al prezzo atteso  $E(S)=1,0683$ .

Il vincolo sul prezzo atteso condiziona, dato il *processo*, la *misura* delle probabilità. Per evidenziare l'effetto *cambio di misura* che ha rilievo centrale nel *pricing* dei derivati, la distribuzione *risk neutral* che elaboriamo mantiene il processo della "vera" distribuzione. Nell'ultima equazione (che identifica  $q$ ) sostituiamo le seguenti espressioni definite prima:

$$F = S_0 e^r$$

$$S_d = S_0 e^{E(h)-v}$$

$$S_u = S_0 e^{E(h)+v}$$

Otteniamo:

$$q = \frac{S_0 e^r - S_0 e^{E(h)-v}}{S_0 e^{E(h)+v} - S_0 e^{E(h)-v}} = \frac{e^{-E(h)} [e^r - e^{E(h)-v}]}{e^{-E(h)} [e^{E(h)+v} - e^{E(h)-v}]} = \frac{e^{r-E(h)} - e^{-v}}{e^v - e^{-v}}$$

A fronte di probabilità vere assunte pari a 0,5, le probabilità *risk neutral* non si pareggiano sempre nei due stati. Perché il loro valore sia compreso tra 0 e 1 (come conviene a misure di probabilità), occorre che la differenza in valore assoluto tra  $r$  e  $E(h)$  non superi la volatilità  $v$ :

$$e^{r-E(h)} - e^{-v} < e^v - e^{-v} \Rightarrow e^{r-E(h)} < e^v \Rightarrow |r - E(h)| < v$$

Ciò è coerente con le condizioni di assenza di arbitraggio, approfondite nel punto successivo.

Per spiegare lo **scostamento** tra  $q$  e  $p$ , basta confrontare i ritorni sui prezzi attesi sotto le due misure, ovvero  $m$  e  $r$ . A tale scopo è meglio utilizzare un'espressione equivalente di  $q^{10}$ :

$$q = 0,5 - \frac{e^{m-E(h)} - e^{r-E(h)}}{e^v - e^{-v}}$$

$$p - q \equiv \Delta q = \frac{e^{-E(h)}(e^m - e^r)}{e^v - e^{-v}} \quad (11)$$

Si desume che in presenza di *drift*  $m$  superiore al tasso senza rischio  $r$  (caso che dovremmo considerare normale per uno strumento rischioso),  $q$  è inferiore al 50% (e viceversa). Ciò è del tutto plausibile, visto che per ottenere un prezzo atteso minore rispetto a quello spiegato da  $m$  è necessario pesare di più il caso ribassista. Invece, la differenza *in valore assoluto* tra  $p$  e  $q$  diminuisce all'aumentare della volatilità  $v$  (l'aumento di  $v$  fa aumentare il denominatore dell'ultima formula).

L'entità del cambio di misura è quindi debole quando la differenza tra *drift* ( $m - r$ ) è piccola in confronto alla volatilità<sup>12</sup>.

Le misure  $p$  e  $q$  coincidono quando il valore atteso della vera distribuzione è uguale al *forward*, situazione che si verifica in un mercato dominato da speculatori neutrali al rischio.

<sup>10</sup> L'espressione si ottiene con i seguenti passaggi:

$$q = \frac{e^{r-E(h)} - e^{-v}}{e^v - e^{-v}} + 0,5 - 0,5 = 0,5 + \frac{e^{r-E(h)} - e^{-v} - 0,5e^v + 0,5e^{-v}}{e^v - e^{-v}} = 0,5 + \frac{e^{r-E(h)} - 0,5(e^{-v} + e^v)}{e^v - e^{-v}}$$

$$= 0,5 - \frac{0,5(e^{-v} + e^v) - e^{r-E(h)}}{e^v - e^{-v}}$$

$$E(S) = 0,5 \times S_0 e^{E(h)}(e^v + e^{-v}) \Rightarrow 0,5(e^v + e^{-v}) = \frac{E(S)}{S_0 e^{E(h)}} = \frac{S_0 e^m}{S_0 e^{E(h)}} = e^{m-E(h)}$$

$$\Rightarrow q = 0,5 - \frac{e^{m-E(h)} - e^{r-E(h)}}{e^v - e^{-v}}$$

<sup>11</sup> Si ha infatti:  $\Delta q = p - q = 0,5 - \left( 0,5 - \frac{e^{m-E(h)} - e^{r-E(h)}}{e^v - e^{-v}} \right) = \frac{e^{m-E(h)} - e^{r-E(h)}}{e^v - e^{-v}} = \frac{e^{-E(h)}(e^m - e^r)}{e^v - e^{-v}}$

<sup>12</sup> Ciò appare evidente sostituendo gli esponenziali con le corrispondenti approssimazioni al secondo ordine:

$$p - q = \frac{e^m - e^r}{e^v - e^{-v}} e^{-E(h)} \approx \frac{\left( 1 + m + \frac{m^2}{2} \right) - \left( 1 + r + \frac{r^2}{2} \right)}{\left( 1 + v + \frac{v^2}{2} \right) - \left( 1 - v + \frac{v^2}{2} \right)} e^{-E(h)} = \frac{\left( m + \frac{m^2}{2} \right) - \left( r + \frac{r^2}{2} \right)}{2v} e^{-E(h)} =$$

$$= \frac{(m-r) + \frac{m^2 - r^2}{2}}{2v} e^{-E(h)}$$

Come si vedrà più avanti, la riduzione della durata dello *step* determina un'accentuazione di tale effetto, essendo la differenza tra *drift* legata linearmente al tempo, mentre  $v$  è funzione della radice quadrata del tempo.

Questa manipolazione delle probabilità, che vincola il valore atteso del prezzo al *forward* desiderato, determina una modificazione del ritorno atteso, così spiegata (i pedici  $p$  e  $q$  indicano le misure di probabilità cui fanno riferimento le grandezze):

$$E_q(h) = E_p(h) - 2\Delta q v_p \quad (13)$$

Si deduce, ancora una volta plausibilmente, che il ritorno atteso è più basso nel caso *risk neutral* se  $r < m$ , quindi  $q < p$ . Anche la volatilità dei ritorni si discosta da quella della vera distribuzione. Possiamo tenere unito infatti derivare la seguente espressione compatta, la cui dimostrazione è sviluppata in appendice al capitolo:

$$v_q = v_p \sqrt{1 - 4\Delta q^2}$$

La volatilità sotto  $q$  ( $v_q$ ) è inferiore a quella della vera distribuzione ( $v_p$ ) nel caso di prezzo atteso superiore al *forward* (quindi  $m > r$ ). Se interpretiamo la differenza tra  $m$  e  $r$  come collegata al premio al rischio richiesto al titolo, possiamo concludere che  $q$  risulta inferiore a  $p$  (minor probabilità di rialzo) in presenza di premi al rischio positivi, e viceversa. La differenza è spiegata dallo scostamento di  $q$  da 0,5 ( $\Delta q$ ), a sua volta spiegato dalla differenza tra *drift* ( $m - r$ ). Se questa cresce in valore assoluto, la differenza tra volatilità aumenta; quest'ultima, a parità di *drift*, diminuisce all'aumentare di  $v_p$  per l'effetto che questo produce su  $\Delta q$ .

Parrebbe quindi che il passaggio a un albero *risk neutral* abbia un inconveniente, visto che altera la proprietà statistica che più ci interessa in questa sede, cioè la volatilità. Questo disturbo, che normalmente è di entità lieve, non è un limite sostanziale dell'approccio a tempo discreto. Potremmo già ottenere coincidenza tra le volatilità se accettassimo di modificare anche il processo dei prezzi, ma questo farebbe venire meno l'evidenza del cambio di misura, che invece ci preme tenere in primo piano vista l'importanza che riveste nella valutazione dei derivati. Inoltre, si tratta di una noia passeggera, come vedremo: nei processi discreti multiperiodali, infatti, la differenza tra le volatilità tende a ridursi per *step* decrescenti, per azzerarsi nel continuo. Meglio quindi tenere in sospenso la questione finché sarà chiarita la relazione tra i ritorni, le volatilità e il tempo in un processo multiperiodale.

## 1.8 Probabilità *risk neutral* e copertura: strumenti con *payoff* lineare

Nell'ultimo passaggio svolto abbiamo "forgiato" una distribuzione *risk neutral* che rispetta un vincolo di valore atteso dei prezzi. In termini formali abbiamo aggiustato il processo, rettificandone il tasso di *drift* da  $m$  a  $r$ , e contestualmente abbiamo adattato la misura di probabilità da  $\{p, (1-p)\}$  a  $\{q, (1-q)\}$ .

È utile approfondire a questo punto il significato economico delle pseudoprobabilità determinate. Essendo  $q$  dipendente soltanto dal processo dei prezzi previsti, occorre verificare che il suo valore, in

<sup>13</sup> Si arriva a tale espressione con i seguenti passaggi:

$$\begin{aligned} E_q(h) &= \ln(u)q + \ln(d)(1-q) \\ E_p(h) &= \ln(u)p + \ln(d)(1-p) \\ E_q(h) - E_p(h) &= \ln(u)(q-p) + \ln(d)(1-q-1+p) \\ E_q(h) &= E_p(h) + \ln(u)(-\Delta q) + \ln(d)(\Delta q) = E_p(h) - \Delta q[\ln(u) - \ln(d)] \\ &= E_p(h) - \Delta q \left[ \ln\left(e^{E_p(h)+v_p}\right) - \ln\left(e^{E_p(h)-v_p}\right) \right] = E_p(h) - \Delta q[E_p(h) + v_p - E_p(h) + v_p] = E_p(h) - 2\Delta q v_p \end{aligned}$$

mercati razionali, risulti strettamente compreso tra 0 e 1, come si conviene a una probabilità. Ciò ovviamente garantisce il rispetto della stessa condizione per la probabilità complementare  $(1 - q)$ . Si ricorda che:

$$q = \frac{F - S_d}{S_u - S_d} \quad 1 - q = 1 - \frac{F - S_d}{S_u - S_d} = \frac{S_u - F}{S_u - S_d}$$

Per evitare valori “degenerati” di  $q$  (probabilità nulle, negative o superiori a 1), si dovrà verificare la seguente condizione:

$$S_d < F < S_u$$

Il prezzo *forward* di equilibrio dovrà essere compreso nell’intervallo tra  $S_d$  e  $S_u$  (estremi esclusi)<sup>14</sup>. Un mercato che non rispetta una condizione del genere è in disequilibrio: sollecita arbitraggi profittevoli privi di rischio per importi illimitati.

Supponiamo di poter effettuare operazioni a termine per importi illimitati al prezzo di equilibrio  $F$  (senza esborsi immediati di liquidità). Se  $F > S_u$  sarà conveniente vendere a termine a  $F$  con la certezza di un risultato non negativo in entrambi i casi futuri; tale risultato è pari a  $(F - S_u)$  nel caso di rialzo del prezzo, e ad un più generoso  $(F - S_d)$  nel caso di ribasso. Tutti venderanno a termine e  $F$  scenderà sotto il livello di  $S_u$ . Se invece si verifica  $F < S_d$  conviene acquistare a termine con la certezza di vendere dopo un periodo a un prezzo più elevato; per effetto della corrente di acquisti  $F$  salirà sopra  $S_d$ .

L’effetto riequilibratore degli arbitraggi, pertanto, impone al mercato il rispetto di un valore di  $S_0$  (quindi di  $F$ ) che garantisce, dati i prezzi previsti, valori ammissibili delle probabilità *risk neutral*. Si dimostra quindi agevolmente che, in mercati razionali,  $q$  e  $(1 - q)$  hanno valori accettabili.

Detto questo, potremmo trattare le pseudoprobabilità come una delle infinite coppie di valori di probabilità che possiamo sovrainporre ai nodi finali dell’albero. In realtà le probabilità *risk neutral* rappresentano un *unicum* dal significato economico ben preciso, la cui utilità pratica nella valutazione di contratti finanziari è enorme. Per cogliere queste proprietà sottili ed anche sorprendenti, ritorniamo al procedimento con il quale abbiamo ottenuto  $q$ : abbiamo forzato i parametri in modo da ottenere un valore atteso del prezzo futuro uguale a  $F$ , ovvero a un dato conoscibile con certezza al tempo iniziale. Una volta ricavate le probabilità *risk neutral*,  $F$  può essere riottenuto (o rispiegato) come valore atteso<sup>15</sup> dei possibili prezzi futuri: in altre parole,  $q$  e  $(1 - q)$  spiegano il prezzo corrente di equilibrio di un contratto finanziario, il cui valore dipende dal prezzo futuro in funzione del relativo processo. Questo legame tra probabilità *risk neutral* e valore di equilibrio di un contratto non è una prerogativa dei *forward*, ma può essere estesa a tutte le fattispecie di derivati.

- Un **derivato** (o *claim*), riferito al processo di un prezzo  $S$ , è un contratto finanziario il cui valore futuro alla scadenza  $T$  (*payoff*) è una funzione nota del processo dei prezzi al tempo corrispondente alla scadenza.

Vogliamo ora dimostrare che il valore di equilibrio del *claim* (che identifichiamo con  $X$ ), determinato come costo di una strategia di replica del suo *payoff* alla scadenza  $T$ , coincide con il valore atteso del *payoff* in  $T$  calcolato sulla distribuzione *risk neutral*.

Nel caso del *forward* la strategia di replica si compone di acquisti a pronti del sottostante più indebitamento a scadenza  $T$  (riproduzione di un *forward* lungo) oppure di vendite a pronti allo scoperto più crediti a scadenza  $T$  (riproduzione di una posizione corta). I parametri della strategia sono:

- il *Delta*, ovvero la quantità di sottostante da negoziare a pronti;

<sup>14</sup> I casi  $F = S_d$  e  $F = S_u$  non sono ammissibili se non attribuendo probabilità nulla a uno dei due eventi, rimuovendo così l’aleatorietà del processo e, con essa, i presupposti dell’esistenza di contratti derivati.

<sup>15</sup> Più correttamente dovremmo definire  $F$  non come valore atteso, ma come aspettativa dei prezzi futuri su un certo numero  $q$ , dato che  $q$  non è esplicitamente stimato come probabilità. Si veda Baxter e Rennie (1996:16). Per semplicità parleremo in tutti i casi di valore atteso tralasciando questa distinzione.

- l'importo iniziale  $B$  del credito/debito.

Il costo/ricavo netto iniziale della strategia, dato dalla differenza tra le due componenti, misura il valore di riproduzione del contratto.

Si supponga di voler replicare un acquisto a termine di un titolo infruttifero con scadenza pari a uno *step*, assumendo un processo binomiale a un periodo. Sia  $r$  il tasso periodale sui crediti/debiti; si ipotizzi inoltre un vincolo di esborso iniziale nullo quale deve essere il valore di mercato di un *forward* alle condizioni correnti di mercato. Per determinare il valore di equilibrio di  $F$  costruiamo un sistema le cui soluzioni soddisfino tre condizioni così formulate:

$$\begin{cases} S_u - F = \text{Delta } S_u - B e^r \\ S_d - F = \text{Delta } S_d - B e^r \\ \text{Delta } S_0 - B = 0 \end{cases}$$

La prima e la seconda equazione identificano rispettivamente il vincolo di eguaglianza tra *payoff* del *forward* e valore della posizione di replica in caso di rialzo e in caso di ribasso; la terza espressione invece si riferisce al vincolo posto (esborso iniziale per la replica nullo). La funzione del *payoff* del *forward* è lineare, essendo per l'acquirente la semplice differenza tra il prezzo *spot* dell'attività sottostante (alla data di scadenza del *forward*) e il prezzo *forward* contrattuale.

Con semplici passaggi determiniamo le seguenti soluzioni:

$$\begin{cases} \text{Delta} = 1 \\ F = S_0 e^r \\ B = S_0 \end{cases}$$

Un'unità *forward* è replicabile finanziando integralmente con debito l'acquisto a pronti di un'unità di sottostante al prezzo  $S_0$ ; tale strategia comporta, a fronte di un esborso iniziale nullo, un'uscita futura contro la disponibilità del titolo pari a  $S_0 e^r$ , che in equilibrio dovrà essere allineata con il prezzo *forward* corrente.

Passando al caso più generale di valutazione di un *forward* con un prezzo contrattuale  $K$  (anche diverso dal prezzo corrente a termine), possiamo ridefinire il problema sostituendo  $K$  a  $F$  e ponendo la condizione di uguaglianza tra costo netto della strategia e valore di mercato del *forward* ( $X_0$ )<sup>16</sup>:

$$\begin{cases} S_u - K = \text{Delta } S_u - B e^r \\ S_d - K = \text{Delta } S_d - B e^r \\ X_0 = \text{Delta } S_0 - B \end{cases}$$

Risolviendo il sistema, otteniamo le seguenti soluzioni:

$$\begin{cases} \text{Delta} = 1 \\ X_0 = S_0 - K e^{-r} \\ B = K e^{-r} \end{cases}$$

Il valore del contratto così determinato ( $X_0$ ) indica un prezzo di equilibrio che sarà prontamente fatto rispettare; infatti se fosse possibile trattare il *forward* a un prezzo iniziale  $X_0$  diverso dal flusso netto della replica ( $S_0 - K e^{-r}$ ), immediatamente scatterebbero interventi di arbitraggio sui mercati *spot*,

---

<sup>16</sup>  $X_0$  è l'esborso dovuto dal contraente che trae vantaggio dal prezzo  $K$  fuori mercato (il venditore se  $K > F$ , l'acquirente nel caso contrario).

*forward* e del credito, che riporterebbero verso un set di valori  $\{S_0, r, X_0\}$  compatibile con la relazione di equilibrio  $X_0 = S_0 - Ke^{-r}$ .

Il *forward* va quindi replicato acquistando un'unità *spot* e finanziandosi per il valore attuale del prezzo contrattuale  $K$ . La differenza tra  $S_0$  e  $B$ , che può essere positiva o negativa, definisce il valore di equilibrio del contratto. Quest'ultimo può essere espresso anche come valore atteso *risk neutral*.

Riprendiamo il sistema precedente:

$$\begin{cases} S_u - K = \text{Delta } S_u - B e^r \\ S_d - K = \text{Delta } S_d - B e^r \\ X_0 = \text{Delta } S_0 - B \end{cases}$$

Sostituiamo nelle prime due equazioni le seguenti espressioni:

$$X_u = S_u - K$$

$$X_d = S_d - K$$

$X_u$  e  $X_d$  sono i simboli generici dei *payoff* a scadenza del *claim*  $X$  nei due stati  $u$  e  $d$ .

Calcolando le differenze tra i membri di sinistra e di destra delle prime due espressioni, ed eguagliando queste ultime, otteniamo:

$$X_u - X_d = \text{Delta } S_u - \text{Delta } S_d$$

$$\text{Delta} = \frac{X_u - X_d}{S_u - S_d}$$

Ricaviamo  $B$  dalle prime due equazioni del sistema:

$$B = \frac{\text{Delta } S_u - X_u}{e^r} = \frac{\text{Delta } S_d - X_d}{e^r}$$

Sostituendo  $S_0$  con  $Fe^{-r}$  e  $B$  e  $\text{Delta}$  con le espressioni precedenti<sup>17</sup>, possiamo ridefinire il valore di equilibrio del *forward*:

$$\begin{aligned} X_0 &= \text{Delta } S_0 - B \\ &= \text{Delta } F e^{-r} - (\text{Delta } S_u - X_u) e^{-r} \\ &= e^{-r} (\text{Delta } F - \text{Delta } S_u + X_u) \\ &= e^{-r} [X_u - \text{Delta} (S_u - F)] \\ &= e^{-r} \left[ X_u - \frac{X_u - X_d}{S_u - S_d} (S_u - F) \right] \\ &= e^{-r} \left[ \frac{X_u (S_u - S_d) - (X_u - X_d) (S_u - F)}{S_u - S_d} \right] \end{aligned}$$

<sup>17</sup> Per  $B$  utilizziamo qui l'espressione contenente  $S_u$  e  $X_u$ ; arriveremmo allo stesso risultato sostituendo l'equazione contenente  $S_d$  e  $X_d$ , equivalente per costruzione.

$$\begin{aligned}
&= e^{-r} \left[ \frac{X_u(S_u - S_d - S_u + F) + X_d(S_u - F)}{S_u - S_d} \right] \\
&= e^{-r} \left[ X_u \frac{F - S_d}{S_u - S_d} + X_d \frac{S_u - F}{S_u - S_d} \right] \\
&= \frac{X_u q + X_d(1 - q)}{e^r}
\end{aligned}$$

C'è un'inevitabile identità matematica tra le due formulazioni di  $X_0$ , ovvero tra:

- $X_0$  come *costo di replica*:  $X_0 = \Delta S_0 - B = S_0 - Ke^{-r}$
- $X_0$  come *valore atteso*:  $X_0 = \frac{X_u q + X_d(1 - q)}{e^r}$

Non è immediatamente intuibile il collegamento logico e matematico tra le due espressioni, che discende dal vincolo di bilanciamento tra i *payoff* del derivato e il valore della strategia di replica che viene imposto nei due scenari. Le conclusioni fin qui raggiunte nel caso del *forward* non sembrano aggiungere granché a quanto già sapevamo sul corretto *pricing* di tale contratto. Anzi, la replica del *forward* basata sulla ricostruzione del *payoff* nei due stati futuri rischia di gravare il procedimento di *pricing* di una complessità ingannevole. Ciò che si voleva dimostrare è un'altra cosa: il prezzo di equilibrio del *forward* è spiegabile come costo di riproduzione e anche come valore atteso *risk neutral*. Trattandosi però di un contratto con *payoff* legato da relazione lineare al prezzo del sottostante, il processo del prezzo è irrilevante ai fini della valutazione perché non influisce sul rapporto di copertura, che assume sempre valore 1.<sup>18</sup>

In realtà questa digressione, apparentemente oziosa, ci ha consentito di presentare un metodo molto potente per la valutazione di qualsiasi derivato. Per gustare appieno questa piacevole sorpresa, cogliendone tutte le implicazioni, utilizziamo lo stesso metodo in due ulteriori esempi relativi a contratti meno banali (con *payoff* non lineare) per poi trarre alcune importanti conclusioni.

## 1.9 Probabilità *risk neutral* e copertura: strumenti con *payoff* non lineare

Consideriamo, a titolo di esempio, due contratti scritti su un identico sottostante. Il prezzo di quest'ultimo segue un processo binomiale a un periodo. Nello specifico ci occupiamo di:

<sup>18</sup> Ciò è evidente dalla semplificazione della seguente espressione:

$$\begin{aligned}
X_0 &= e^{-r} \left[ X_u - \frac{X_u - X_d}{S_u - S_d} (S_u - F) \right] \\
&= e^{-r} \left[ (S_u - K) - \frac{(S_u - K) - (S_d - K)}{S_u - S_d} (S_u - F) \right] \\
&= e^{-r} [(S_u - K) - 1 \times (S_u - F)] \\
&= e^{-r} (F - K) \\
&= S_0 - Ke^{-r}
\end{aligned}$$

- un'opzione *put* a un periodo con *strike*  $K$ , che dà la facoltà di vendere alla scadenza un'unità del sottostante al prezzo  $K$  (tale facoltà sarà esercitata quando il prezzo a scadenza risulta inferiore allo *strike*, con *payoff* pari a:  $K - S$ );
- un contratto quadratico, che paga alla scadenza (sempre uniperiodale) la differenza tra il quadrato del prezzo del sottostante e il quadrato del prezzo contrattuale  $W$ .
- 

**Tabella 1.9.1 - Grandezze rilevanti per la valutazione.**

	Contratti	
	opzione <i>put</i>	contratto quadratico
<b>valore iniziale</b>	$P_0$	$Q_0$
<i>payoff</i> caso rialzo ( $X_u$ )	$\max(K - S_u; 0)$	$S_u^2 - W^2$
<i>payoff</i> caso ribasso ( $X_d$ )	$\max(K - S_d; 0)$	$S_d^2 - W^2$

Le strategie di copertura si ricavano risolvendo sistemi di equazioni così articolati:

- opzione *put*:

$$\begin{cases} \max(K - S_u; 0) = \text{Delta}_p S_u - B_p e^r \\ \max(K - S_d; 0) = \text{Delta}_p S_d - B_p e^r \\ P_0 = \text{Delta}_p S_0 - B_p \end{cases}$$

- contratto quadratico:

$$\begin{cases} S_u^2 - W^2 = \text{Delta}_Q S_u - B_Q e^r \\ S_d^2 - W^2 = \text{Delta}_Q S_d - B_Q e^r \\ Q_0 = \text{Delta}_Q S_0 - B_Q \end{cases}$$

Le soluzioni del primo sistema sono le seguenti (omettiamo lo sviluppo):

$$\begin{aligned} \text{Delta}_p &= \frac{\max(K - S_u; 0) - \max(K - S_d; 0)}{S_u - S_d} = \frac{P_u - P_d}{S_u - S_d} \\ B_p &= \frac{\text{Delta}_p S_u - P_u}{e^r} = \frac{\text{Delta}_p S_d - P_d}{e^r} \\ P_0 &= \frac{P_u - \text{Delta}_p (S_u - F)}{e^r} = \frac{P_d - \text{Delta}_p (S_d - F)}{e^r} = \frac{P_u q + P_d (1 - q)}{e^r} \end{aligned}$$

Vediamo le soluzioni del secondo sistema (sempre tralasciando lo sviluppo):

$$\text{Delta}_Q = \frac{(S_u^2 - W^2) - (S_d^2 - W^2)}{S_u - S_d} = \frac{Q_u - Q_d}{S_u - S_d}$$

$$B_Q = \frac{\text{Delta}_Q S_u - Q_u}{e^r} = \frac{\text{Delta}_Q S_d - Q_d}{e^r}$$

$$Q_0 = \frac{Q_u - \text{Delta}_Q (S_u - F)}{e^r} = \frac{Q_d - \text{Delta}_Q (S_d - F)}{e^r} = \frac{Q_u q + Q_d (1 - q)}{e^r}$$

Per entrambi i contratti abbiamo:

$$q = \frac{F - S_d}{S_u - S_d}$$

Le soluzioni hanno la medesima struttura in tutti e tre i casi analizzati. Riassumiamo gli elementi comuni:

- il *Delta* è definito dalla funzione del *payoff* a scadenza del derivato; è infatti la differenza tra i valori del derivato nei due nodi finali rapportata alla differenza tra i prezzi del sottostante. Indica la quantità di sottostante da acquistare (se *Delta* è positivo, come per l'acquisto a termine e per il contratto quadratico) o vendere (se *Delta* è negativo, come nel caso del *put*) per riprodurre il derivato;
- il credito/debito (*B*) è la differenza (uguale nei due nodi per costruzione) tra il valore della posizione *Delta* a scadenza e il *payoff* del derivato, attualizzata al tempo iniziale;
- il costo/ricavo netto di riproduzione è la differenza attualizzata (ancora uguale per costruzione nei due scenari) tra il valore finale del derivato e il risultato di una posizione *forward* sul sottostante di importo *Delta* costituita alla data iniziale al prezzo *F*. Ciò equivale a dire che tale valore iniziale di equilibrio è pari al valore atteso del *payoff*, determinato in base alle probabilità *risk neutral*, attualizzato al tempo iniziale.

Il procedimento descritto vale per qualsiasi albero con  $S_u > F > S_d$ ; i due prezzi finali possono essere disposti più o meno asimmetricamente rispetto al *forward*. Ne risultano influenzati il *Delta*, le probabilità *risk neutral* e il valore iniziale, ma la formula è sempre coerentemente applicabile. Le formule che calcolano  $S_u$  e  $S_d$  in funzione di *drift* e varianza e quelle che regolano il bilanciamento dell'albero sono vincoli accessori intesi a modellare la forma della distribuzione e la sua convergenza al caso normale a tempo continuo, nonché a semplificare la relazione tra volatilità e parametri di costruzione dell'albero.

*La strategia di riproduzione è definita da due parametri, Delta e B, riferiti rispettivamente a operazioni spot sul sottostante e a crediti/debiti a tasso fisso. Per l'equivalenza tra posizioni spot e forward, possiamo definire la stessa strategia come la somma di un forward con scadenza pari a quella del derivato al prezzo corrente F per importo Delta (che ha valore iniziale nullo) più un credito/debito di importo pari al valore finale (uguale nei due scenari) di una posizione comprendente un'unità del derivato coperta da (-Delta) unità di forward sul sottostante, il tutto attualizzato al tempo iniziale. In equilibrio l'ammontare del credito/debito è pari al valore iniziale del derivato. Con questa formulazione il sistema da cui si ricava la strategia in condizioni di equilibrio è così configurato:*

$$\begin{cases} X_u = \text{Delta}(S_u - F) + L e^r \\ X_d = \text{Delta}(S_d - F) + L e^r \\ X_0 = L \end{cases}$$

dove *L* è l'ammontare del credito (se positivo) o debito (se negativo) da inserire nella strategia.

Le soluzioni del sistema sono le seguenti<sup>19</sup>:

<sup>19</sup> Sottraendo le prime due equazioni, determiniamo *Delta*:

$$X_u - X_d = \text{Delta}(S_u - F - S_d + F) \Rightarrow \text{Delta} = \frac{X_u - X_d}{S_u - S_d}$$

Ricaviamo *L* dalla prima espressione:

$$\Delta = \frac{X_u - X_d}{S_u - S_d}$$

$$X_0 = L = (X_u - \Delta S_u)e^{-r} = (X_d - \Delta S_d)e^{-r}$$

*Preferiamo questa scomposizione della replica basata sul forward sia per la maggior compattezza delle formulazioni che se ne possono ricavare, sia perché ricorda che la strategia deve basarsi su posizioni a termine sul sottostante, opportunità non automaticamente garantita, per la possibilità di frizioni, dall'esistenza di un mercato spot e di crediti/debiti a tasso fisso. Inoltre il modello così configurato è applicabile a derivati su sottostante forward o future. Si ricorda, infine, che alla scadenza un contratto forward è fungibile con uno spot e quindi le rispettive distribuzioni dei prezzi tendono a sovrapporsi perfettamente.*

## 1.10 Probabilità *risk neutral* e prezzo dei titoli Arrow-Debreu

Basandoci sulle probabilità *risk neutral*, possiamo definire una regola universale di *pricing* dei derivati con sottostante negoziabile: per un dato processo dei prezzi del sottostante applicheremo sempre gli stessi valori di  $q$  e  $(1 - q)$  per qualsiasi formula contrattuale che determina il *payoff*. I valori futuri del derivato pesati per  $q$  e  $(1 - q)$  e attualizzati portano al valore di equilibrio iniziale del derivato. Il procedimento descritto corrisponde all'**approccio probabilistico** al *pricing* dei derivati<sup>20</sup>. La valutazione si presenta così plausibile e familiare per quanti ragionano secondo i modelli classici di teoria delle decisioni, basati su valutazione mediante attualizzazione del valore atteso di una distribuzione.

Non è superfluo ribadire che seguendo questo approccio il problema di valutazione può essere separato in due parti:

- la prima, comune a tutti i contratti su un medesimo sottostante, basata sulla costruzione del processo e sulla conseguente determinazione delle probabilità *risk neutral*;
- la seconda, specifica di ogni contratto, basata sulla determinazione dei *payoff* finali in base al processo dei prezzi e alla formula contrattuale dello strumento specifico.

È bene sottolineare un altro punto fondamentale: le probabilità *risk neutral* sono biunivocamente associate con una strategia di replica praticabile. In altre parole, se esiste una strategia di replica senza rischio praticabile in un mercato in equilibrio, allora possono essere calcolate probabilità *risk neutral* non “degeneri” (comprese tra 0 e 1) ed anche, invertendo la proposizione, se possono essere calcolate probabilità *risk neutral* corrette, allora si può determinare una replica senza rischio razionalmente costruibile. Rinviamo al paragrafo 3.3 l'approfondimento di tale teorema, qui ci preme evidenziare che un processo che conduce a probabilità *risk neutral* degenerate è caratterizzato da prezzi futuri entrambi superiori o entrambi inferiori al *forward* corrente. In tali condizioni il problema non è tanto

$$L = (X_u - \Delta S_u + \Delta F)e^{-r}$$

$$\Delta F = 0 \Rightarrow L = (X_u - \Delta S_u)e^{-r}$$

Se utilizziamo la seconda equazione, otteniamo:

$$L = (X_d - \Delta S_d)e^{-r}$$

Le soluzioni del sistema sono le seguenti:

$$\Delta = \frac{X_u - X_d}{S_u - S_d}$$

$$X_0 = L = (X_u - \Delta S_u)e^{-r} = (X_d - \Delta S_d)e^{-r}$$

<sup>20</sup> L'approccio probabilistico è stato introdotto per la prima volta in Cox e Ross (1976).

la calcolabilità di un *Delta* che pareggi il valore della replica nei due nodi<sup>21</sup>. La questione è che nessuno applicherà tale rapporto di copertura, essendo possibile migliorare indefinitamente il risultato in assenza di rischio aumentando il valore di *Delta* fino a  $+\infty$  (se  $F < S_d < S_u$ ) o riducendolo fino a  $-\infty$  (se  $F > S_u > S_d$ ). In parole povere, se gli operatori possono trovare in un mercato *forward* fuori equilibrio una comoda macchina da soldi, nessuno perderà tempo ed energie in delicate e meno profittevoli strategie di arbitraggio prive di rischio. Pertanto il mercato dei derivati perde il suo ancoraggio con i mercati *spot* e *forward* e diventa terreno per un *trading* direzionale sulle cui basi non è più definibile una regola di *pricing* di equilibrio.

*Ulteriore condizione per la replicabilità del derivato è che la funzione del payoff sia continua il che, nel nostro caso, implica che sia definita per entrambi i valori futuri  $S_u$  e  $S_d$ .*

L'approccio probabilistico piace perché ha il pregio di nascondere i dettagli tecnici della strategia di replica (cioè l'ammontare di *Delta* e del credito/debito), lasciando in evidenza soltanto i valori del *claim*, determinati sul processo sottostante con formule certe (da contratto) e riferiti alla scadenza (oppure al momento dell'eventuale estinzione anticipata); esso fornisce quindi un metodo più robusto, facile da estendere a variazioni della formula contrattuale.

Per esempio, è semplice gestire con tale approccio modifiche nei tempi di regolamento del prezzo iniziale del derivato (un prezzo liquidato a scadenza richiede la semplice rimozione del fattore di attualizzazione dalla formula di  $X_0$ ).

Portando agli estremi il nostro ragionamento, possiamo vedere nelle probabilità *risk neutral* un sistema dei prezzi delle attività finanziarie rischiose relative ad uno stesso sottostante negoziabile. Ogni attività rischiosa può essere vista come un portafoglio di titoli puri che pagano un *payoff* unitario in uno stato di natura e zero in tutti gli altri stati possibili. Chiamiamo questi contratti **Arrow Debreu Securities (ADS)**, dagli eminenti economisti che le hanno ideate e introdotte nei loro celebri modelli di equilibrio economico intertemporale<sup>22</sup>.

Qualsiasi *asset* per il quale è definito un insieme esaustivo dei possibili stati futuri e il processo che conduce ai prezzi in tali stati, può essere facilmente replicato con un portafoglio di *ADS*. L'*asset* è infatti l'aggregazione di "atomi" corrispondenti a posizioni lunghe e corte in *ADS*: il *payoff* per ogni stato è replicato con un pari importo di *ADS* relative a quello stato, aventi lo stesso segno del *payoff*.

Ora, per quanto detto, il prezzo di equilibrio con regolamento a pronti di un'*ADS* è pari al prodotto della probabilità *risk neutral* ad esso attribuita per il fattore di sconto applicabile al relativo *payoff*. Nel caso del nostro microprocesso binomiale, avremo due stati *u* e *d*, per i quali si determinano i seguenti prezzi Arrow Debreu:

$$ADS_u = q e^{-r} \quad ADS_d = (1 - q) e^{-r}$$

I prezzi delle *ADS* devono essere positivi in equilibrio, come del resto le probabilità *risk neutral* dalle quali dipendono; un prezzo negativo implicherebbe infatti un'entrata netta iniziale a favore di chi, acquistando un'*ADS*, detiene il diritto a un *payoff* futuro non negativo (tipico caso di "macchina da soldi" che stimolerebbe interventi riequilibratori di arbitraggio).

## 1.11 Dai prezzi dei derivati alla volatilità implicita

L'evoluzione della teoria e della prassi finanziaria successiva a Black e Scholes (1973) ha privilegiato modelli ancorati a prezzi di mercato osservabili, eliminando per quanto possibile dai modelli le variabili di natura soggettiva. Non è immune da questa tendenza l'ambito di cui ci stiamo occupando, ovvero i modelli di *pricing* dipendenti dalla volatilità. Abbiamo finora assunto la volatilità come un dato esogeno applicato nella costruzione del "vero" processo insieme con i prezzi *spot* correnti e i tassi

<sup>21</sup> Infatti, vale ancora la formula  $Delta = \frac{X_u - X_d}{S_u - S_d}$ , che non dipende dal valore corrente del *forward*.

<sup>22</sup> Si vedano Debreu (1959) e Arrow (1964).

di interesse. La distribuzione *risk neutral*, esprimibile come set di prezzi ADS, è usata poi come “listino prezzi” per ricavare dai *payoff* i valori iniziali di equilibrio.

Possiamo ora invertire la direzione del procedimento, per risalire dai prezzi dei derivati alla distribuzione *risk neutral* e da questa alla volatilità implicita che la spiega. Chiaramente, questo procedimento inverso richiede un’ipotesi sulla forma della distribuzione sottostante, che manterremo di tipo binomiale a un periodo.

Non tutti i derivati consentono di retrocalcolare delle volatilità implicite. Abbiamo visto (vedi paragrafo 1.9) che i derivati lineari (come i *forward*) hanno prezzi insensibili al processo del sottostante. Ci dobbiamo quindi basare su strumenti con *payoff* non lineare; tra questi ci riferiamo alla fattispecie principale rappresentata dalle opzioni finanziarie<sup>23</sup>.

Per avviare il procedimento, siano dati il prezzo *spot* corrente ( $S_0$ ) del sottostante (che per semplicità consideriamo infruttifero), il tasso uniperiodale  $r$  e il premio corrente ( $C_0$ ) per un’opzione *call* (a scadenza uniperiodale) con *strike*  $K$ . Cerchiamo di determinare la coppia di prezzi  $S_u$  e  $S_d$  e da questi la volatilità della distribuzione *risk neutral* costruita su tale processo. Possono essere quotati *call* uniperiodali per più livelli di *strike*. Scegliamo il contratto con *strike* uguale al *forward* corrente (che è detto in gergo *at the money forward*), a motivo della maggior liquidità che normalmente lo caratterizza per l’uguaglianza tra premi *put* e *call* che è in tale caso verificata (in un mercato in equilibrio questo ci dà la possibilità di utilizzare indifferentemente l’uno o l’altro tipo di opzione). Inoltre, ed è il punto decisivo, ponendo  $K = F$  siamo sicuri della non linearità del *payoff* rispetto a  $F$ , condizione necessaria per la stima della volatilità implicita. Infatti, essendo per il vincolo di non arbitraggio  $S_d < F < S_u$  avremo  $S_d < K$  e  $S_u > K$ , con *payoff* nullo nel primo caso e positivo nel secondo.

Un’opzione con *strike* “troppo” alto (superiore a  $S_u$ ) scadrebbe sicuramente *out-of-the-money* a prescindere dal prezzo futuro realizzato. Uno *strike* “troppo” basso (inferiore a  $S_d$ ) renderebbe certo l’esercizio e farebbe implodere il *call* verso un acquisto *forward*.

Per ricavare il processo del sottostante da  $C_0$ , supponiamo che tale premio sia quotato al valore di equilibrio e quindi spiegato come valore atteso *risk neutral* del *payoff*; il problema ha due incognite:  $S_u$  e  $S_d$ . Definiamo una seconda equazione di bilanciamento dell’albero che vincola i valori di  $S_u$  e  $S_d$  in base a una regola di centratura sul prezzo *forward*:

$$S_u \times S_d = F^2$$

Tale espressione corrisponde al vincolo di centratura dell’albero sui prezzi *forward*; infatti, sostituendo nell’equazione le espressioni equivalenti dei prezzi contenenti  $S_0$  otteniamo:

$$S_0 \times u \times S_0 \times d = (S_0 e^r)^2 \Rightarrow u \times d = e^{2r}$$

Questo vincolo è diverso da quello applicato prima alla “vera” distribuzione; corrisponde ad esigenze pratiche, che si pongono in modelli di *pricing* più complessi<sup>24</sup>.

Ricaviamo il sistema seguente:

$$\begin{cases} C_0 = \left[ \max(S_u - K; 0) \frac{F - S_d}{S_u - S_d} + \max(S_d - K; 0) \frac{S_u - F}{S_u - S_d} \right] e^{-r} \\ S_u \times S_d = F^2 \end{cases}$$

<sup>23</sup> Esistono altri strumenti, come i contratti quadratici prima menzionati a scopo esemplificativo, che sono caratterizzati da un’artificiosa non linearità del *payoff* non rispondente a fondate ragioni economiche.

<sup>24</sup> Ci si riferisce agli alberi a volatilità implicita, introdotti in Dupire (1993), Rubinstein (1994) e Derman e Kani (1994). Un’alternativa di vincolo coerente con quello utilizzato in precedenza è data da:  $u \times d = e^{2r - v^2}$ , che peraltro non garantisce un *payoff* non lineare per opzioni *at the money forward*.

La prima equazione del sistema, che pone l'uguaglianza tra prezzo osservato del *call* e valore atteso *risk neutral* del suo *payoff* a scadenza, può essere semplificata; essendo  $K = F$  (il *call* è *at the money*),  $S_d < F$  e  $S_u > F$ , possiamo eliminare il secondo addendo del valore atteso e rimuovere l'operatore *max* dal primo:

$$\begin{cases} C_0 = \left[ (S_u - F) \frac{F - S_d}{S_u - S_d} \right] e^{-r} \\ S_u \times S_d = F^2 \end{cases}$$

Il sistema è risolto per:

$$S_u = \frac{F + C_0 e^r}{1 - \frac{C_0 e^r}{F}}$$

$$S_d = \frac{F - C_0 e^r}{1 + \frac{C_0 e^r}{F}}$$

In alternativa, potremmo utilizzare (ottenendo lo stesso risultato) il *put at the money forward* con premio  $P_0 = C_0$  in equilibrio. Il sistema in tale caso è il seguente:

$$\begin{cases} P_0 = \left[ \max(K - S_u; 0) \frac{F - S_d}{S_u - S_d} + \max(K - S_d; 0) \frac{S_u - F}{S_u - S_d} \right] e^{-r} \\ S_u \times S_d = F^2 \end{cases}$$

Semplificando la prima equazione otteniamo:

$$\begin{cases} P_0 = \left[ (F - S_d) \frac{S_u - F}{S_u - S_d} \right] e^{-r} \\ S_u \times S_d = F^2 \end{cases}$$

Si noti l'identità tra le espressioni del *payoff* atteso del *call* in caso di rialzo e del *put* in caso di ribasso (*payoff* e numeratore della probabilità si scambiano di posto); questa simmetria dei valori attesi è forzata dalla distribuzione *risk neutral*.

A questo punto è facilmente ricavabile la volatilità dei ritorni; si può utilizzare la formula esatta:

$$v = \sqrt{\ln\left(\frac{S_u}{S_0}\right)^2 \times q + \ln\left(\frac{S_d}{S_0}\right)^2 \times (1-q) - \left[ \ln\left(\frac{S_u}{S_0}\right) \times q + \ln\left(\frac{S_d}{S_0}\right) \times (1-q) \right]^2}$$

In alternativa si può derivare una soluzione approssimata:

$$v = \ln\left(\frac{S_u}{S_0}\right) - r$$

Tale soluzione approssimata è coerente con le seguenti espressioni di  $u$  e  $d$ :

$$u = \frac{S_u}{S_0} = e^{r+\nu}$$
$$d = \frac{S_d}{S_0} = e^{r-\nu}$$

Come si può vedere da questo semplice esempio, il procedimento di estrazione del processo e della volatilità implicita è piuttosto macchinoso. Per semplificare le espressioni matematiche siamo stati costretti a introdurre dei vincoli di bilanciamento diversi da quelli utilizzati prima, e abbiamo inoltre suggerito delle soluzioni approssimate. Il lettore ha così avuto un assaggio dei problemi che si incontrano nell'applicare i modelli binomiali e degli accorgimenti artigianali che si devono escogitare per risolvere nella pratica quei problemi. Speriamo altresì che sia stato apprezzato il valore delle informazioni che queste tecniche estraggono dai prezzi dei derivati.



# Capitolo 2 - Processi binomiali multiperiodo

La distribuzione binomiale a un periodo permette di valutare le opzioni solamente a scopo didattico.

È invece del tutto applicabile a casi concreti di valutazione la sua naturale evoluzione, ovvero la distribuzione binomiale a più periodi, molto utilizzata per la sua semplicità e per l'efficacia nel valutare un'ampia varietà di opzioni. Dopo aver analizzato le proprietà della distribuzione binomiale a più periodi, vedremo come essa converge verso una distribuzione di tipo continuo con momenti facilmente ricavabili dai suoi parametri di costruzione.

## 2.1 Alberi a $n$ periodi

Consideriamo dapprima la distribuzione dei ritorni su un orizzonte  $t_n$  articolato in una sequenza di  $n$  periodi. Il ritorno si ricava come logaritmo del rapporto tra il prezzo finale e il prezzo iniziale. Se il nostro scopo fosse quello di osservare lo specifico valore realizzato *ex post*, potremmo tralasciare la storia delle variazioni occorse sui singoli *step*. Ma visto che il nostro fine è apprezzare la distribuzione del ritorno sul periodo da 0 a  $n$ , è fondamentale considerare la sequenza degli *shock* aleatori che porta a un certo prezzo finale.

Per meglio distinguere le grandezze utilizzate nel capitolo 1 riferite a periodi “atomici” (singoli *step*) da quelle “cumulate” su serie di *step*, differenziamo la notazione nel secondo caso adottando come simboli le seguenti lettere greche:

- per il **ritorno**  $\xi$  al posto di  $h$ ;
- per la **volatilità**  $\sigma$  al posto di  $v$ ;
- per il **ritorno sul prezzo atteso**  $\mu$  al posto di  $m$ .

Faremo eccezione per  $r$ , che continueremo a indicare con lettera latina precisando di volta in volta il periodo di riferimento. Il tasso  $r$  è un dato esogeno, quindi non vale nel suo caso il timore di complicarne l'espressione matematica.

Determiniamo, in primo luogo, il ritorno cumulato, pari al logaritmo del rapporto tra il prezzo finale e il prezzo iniziale. Ne “esplodiamo” la formula sostituendo al rapporto tra prezzi estremi il prodotto dei *price relative* uniperiodali:

$$\xi(0, t_n) = \ln\left(\frac{S_n}{S_0}\right) = \ln\left(\frac{S_n}{S_{n-1}} \times \frac{S_{n-1}}{S_{n-2}} \times \dots \times \frac{S_2}{S_1} \times \frac{S_1}{S_0}\right)$$

Per le proprietà dei logaritmi possiamo scrivere:

$$\xi(0, t_n) = \ln\left(\frac{S_n}{S_{n-1}}\right) + \ln\left(\frac{S_{n-1}}{S_{n-2}}\right) + \dots + \ln\left(\frac{S_2}{S_1}\right) + \ln\left(\frac{S_1}{S_0}\right) = h_n + h_{n-1} + \dots + h_2 + h_1 = \sum_{k=1}^n h_k$$

(per brevità indichiamo i ritorni uniperiodali relativi allo *step*  $k$ -esimo con  $h_k$ ).

Il ritorno uniperiodale  $h_k$  è una variabile casuale (la scriviamo in grassetto poiché indica un vettore di valori/probabilità). Il ritorno cumulato  $\xi(0, t_n)$  è una somma di variabili casuali dato che, grazie all'impiego di tassi continui, i ritorni godono di additività rispetto al tempo. Le proprietà statistiche di  $\xi(0, t_n)$  richiedono, per essere derivate, delle precise ipotesi sul comportamento della serie dei ritorni (precisamente sulla *stazionarietà* delle proprietà della distribuzione uniperiodale e sull'*indipendenza* tra ritorni sfasati nel tempo). Per il *pricing* dei derivati si ipotizza che il motore aleatorio sia caratterizzato da ritorni IID uniperiodali ovvero:

- **indipendenti**, cioè con funzione di probabilità ovunque costante il che implica (condizione meno restrittiva) correlazione lineare nulla tra ritorni sfasati (assenza di autocorrelazione seriale);
- **identicamente distribuiti**, quindi con parametri di *drift* e varianza stazionari nel tempo.

Processi così configurati sono privi di memoria, come la serie dei lanci di una moneta non truccata: ad ogni lancio le probabilità degli eventi testa e croce restano  $\frac{1}{2}$  e  $\frac{1}{2}$ , a prescindere dalla frequenza relativa osservata nei lanci precedenti o dai *pattern* con i quali si sono succeduti esiti opposti.

Nel caso discreto, assumendo un processo binomiale con rialzi e ribassi ugualmente probabili, la condizione IID può essere agevolmente precisata. Detta condizione è rispettata quando il motore aleatorio che aziona le perturbazioni casuali appartiene a una particolare famiglia di processi binomiali nel discreto, i processi di *tipo random walk*.

Adotteremo un *random walk* binomiale  $Y_k$  (dove  $k$  indica il numero progressivo dello *step*) con le seguenti proprietà:

- ha valore iniziale nullo ( $Y_0 = 0$ );
- prevede una variazione incrementale aleatoria (salto o *jump*)  $\Delta Y_k$  che si produce a intervalli costanti di durata pari a  $\Delta t$  unità temporali corrispondenti a uno *step*;
- i salti sono variazioni positive e negative costanti nel tempo pari a  $+1$  e  $-1$ ;
- al processo si applica una misura  $\mathbb{P}$  con probabilità di incremento e decremento costanti nel tempo e uguali a  $\frac{1}{2}$ .

$\Delta Y_k$  ha media nulla e varianza (e deviazione standard) pari a 1 (<sup>1</sup>).

---

<sup>1</sup> Infatti si ottiene:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\Delta Y_k) &= 0,5 \times 1 + 0,5 \times (-1) = 0 \\ \sigma^2(\Delta Y_k) &= 0,5 \times (1-0)^2 + 0,5 \times (-1-0)^2 = 1 \\ \sigma(\Delta Y_k) &= \sqrt{\sigma^2(\Delta Y_k)} = 1 \end{aligned}$$

Di conseguenza il processo  $Y_k$ , definito come somma di  $k$  incrementi indipendenti casuali ( $Y_k = Y_{k-1} + \Delta Y_k$ ), ha media 0 e varianza pari a  $k\sigma^2(\Delta Y_k) = k$  <sup>(2)</sup>.

Il ritorno del generico periodo  $k$ -esimo è facilmente definito in funzione di  $\Delta Y_k$  e dei parametri  $a$  e  $b$  già usati nel caso uniperiodale:

$$h_k = a + b\Delta Y_k = E(h) + v\Delta Y_k$$

Il **valore atteso** del ritorno cumulato su  $n$  periodi, corrispondenti a un orizzonte di  $t_n$  anni, è un multiplo di quello uniperiodale essendo  $\xi(0, t_n)$  somma di  $n$  variabili aleatorie con media così calcolata:

$$E[\xi(0, t_n)] = \sum_{k=1}^n E[h_k] = E(h)n \quad [2.1.1]$$

La relativa **varianza** è ancora facilmente calcolabile con il procedimento generale applicato alla somma di variabili casuali. Data l'ipotesi di assenza di correlazione seriale, essa è ricavata dalla somma delle varianze di *step* ma, essendo queste costanti, è rapidamente ottenibile come prodotto di  $v^2$  per il numero di periodi  $n$ :

$$\sigma^2(0, t_n) = v^2 n$$

Poiché la relazione tra varianza e numero di *step* è lineare, la deviazione standard è funzione della radice quadrata di  $n$ :

$$\sigma(0, t_n) = v\sqrt{n} \quad [2.1.2]$$

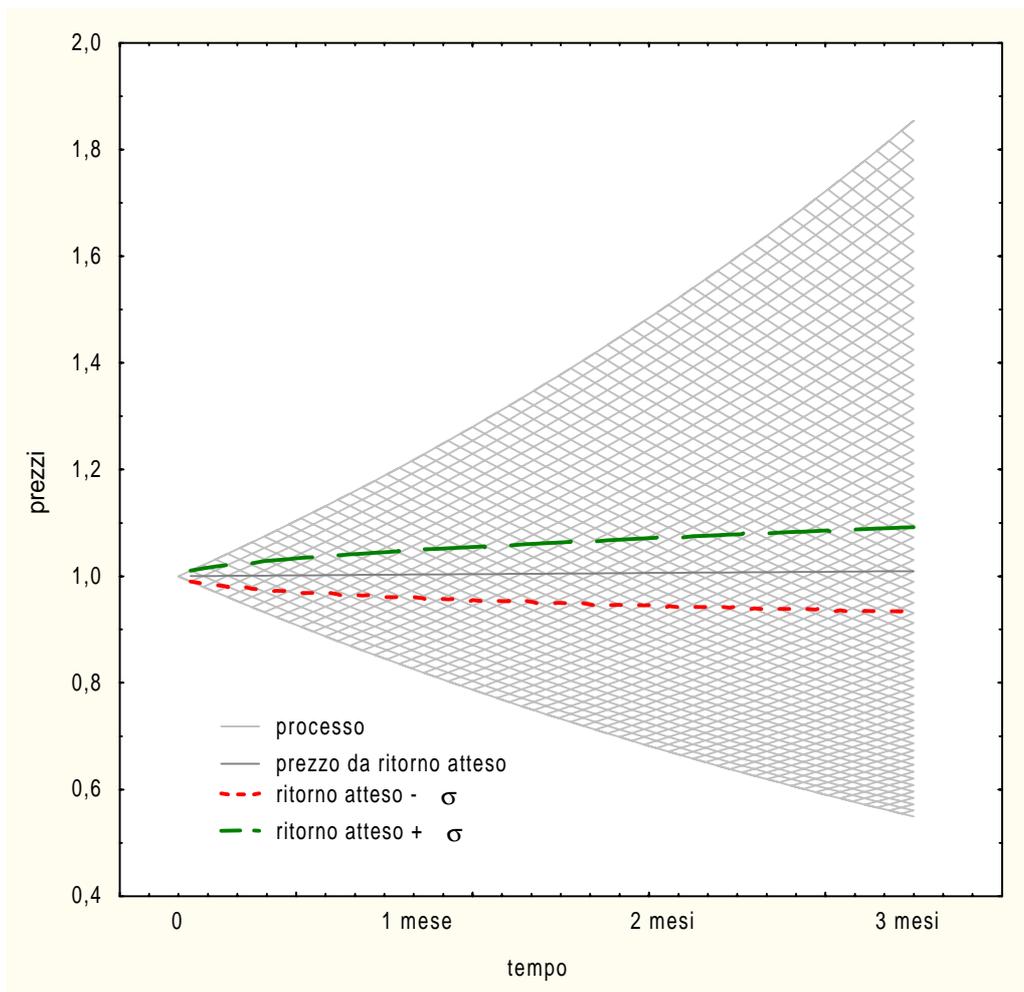
La dispersione del ritorno cumulato cresce nel tempo, ma non in modo esplosivo. Lo osserviamo dalle seguenti figure 2.1.1 e 2.1.2 che mostrano il reticolo dei prezzi e dei logaritmi dei prezzi ottenuto per un processo binomiale IID. Si nota nella figura 2.1.1 la tipica asimmetria verso l'alto del processo dei prezzi. La distanza tra i valori estremi cresce linearmente (nel caso dei logaritmi dei prezzi) al trascorrere del tempo. Nel grafico sono tracciate due linee che collegano i punti della distribuzione corrispondenti rispettivamente ai prezzi per ritorni pari al valore atteso aumentato e diminuito di una deviazione standard: la pendenza delle linee si smorza col passare del tempo e la relativa distanza verticale cresce, ma sempre più lentamente.

---

<sup>2</sup> Dimostriamo quanto affermato per i primi due incrementi:

$$\begin{array}{lll}
 Y_1 = Y_0 + \Delta Y_1 = \Delta Y_1 & E(\Delta Y_1) = 0 & \sigma^2(\Delta Y_1) = 1 \\
 Y_2 = Y_1 + \Delta Y_2 & E(Y_2) = E(Y_1) + E(\Delta Y_2) = 0 & \sigma^2(Y_2) = \sigma^2(Y_1) + \sigma^2(\Delta Y_2) = 1 + 1 = 2
 \end{array}$$

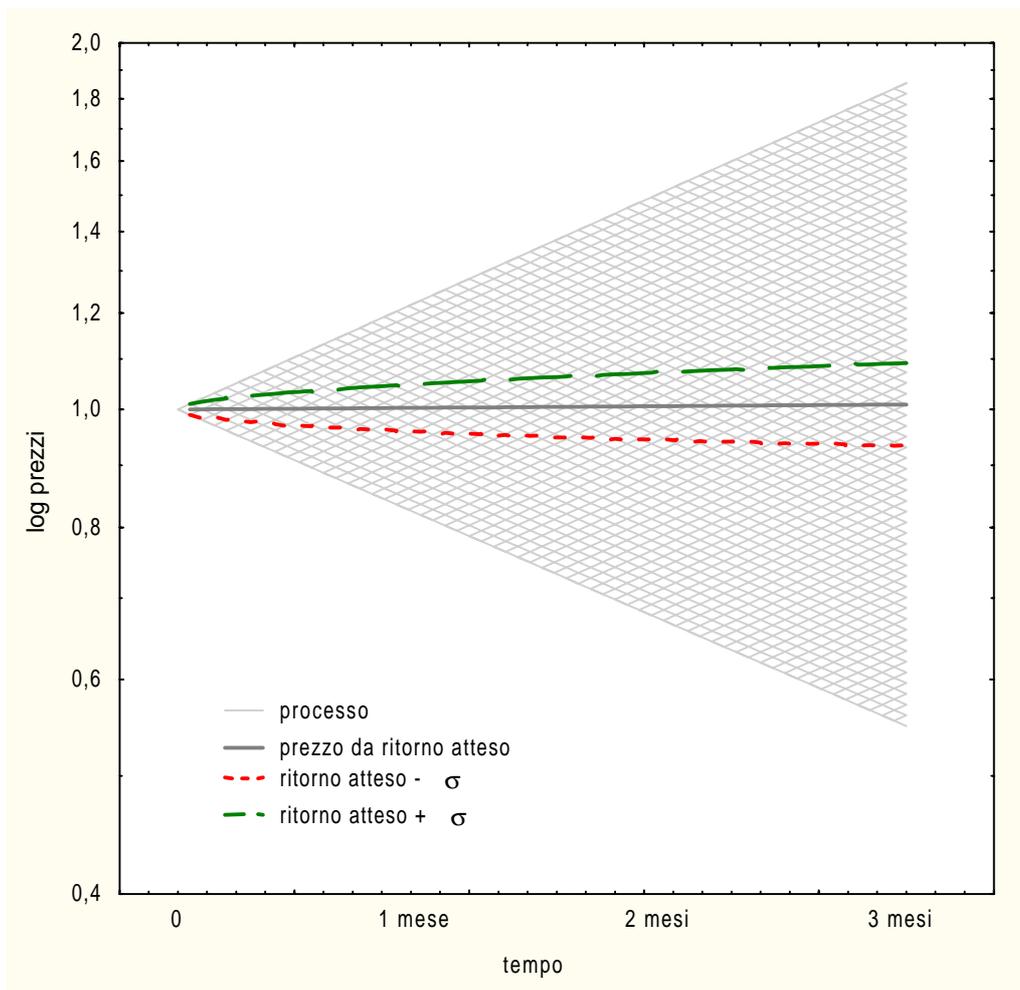
Figura 2.1.1 - Albero del prezzo con intervalli di confidenza.



Ipotesi di *drift* del 5% e volatilità del 15,7% (base annua). Processo di 60 *step* giornalieri.

**Ritorni e logaritmo dei prezzi.** I ritorni cumulati sono dati dalla differenza tra il logaritmo del prezzo finale e il logaritmo del prezzo iniziale. Pertanto, essendo il prezzo iniziale ovviamente fermo, abbiamo due processi che esibiscono le stesse variazioni: il ritorno cumulato e il logaritmo del prezzo finale. Essi presentano la stessa scala e differiscono solo per il valore iniziale che è 0 per il primo e  $\ln(S_0)$  per il secondo. Per questo parallelismo utilizzeremo negli esempi le distribuzioni del logaritmo dei prezzi per quelle dei ritorni.

Figura 2.1.2 - Albero del logaritmo del prezzo con intervalli di confidenza.

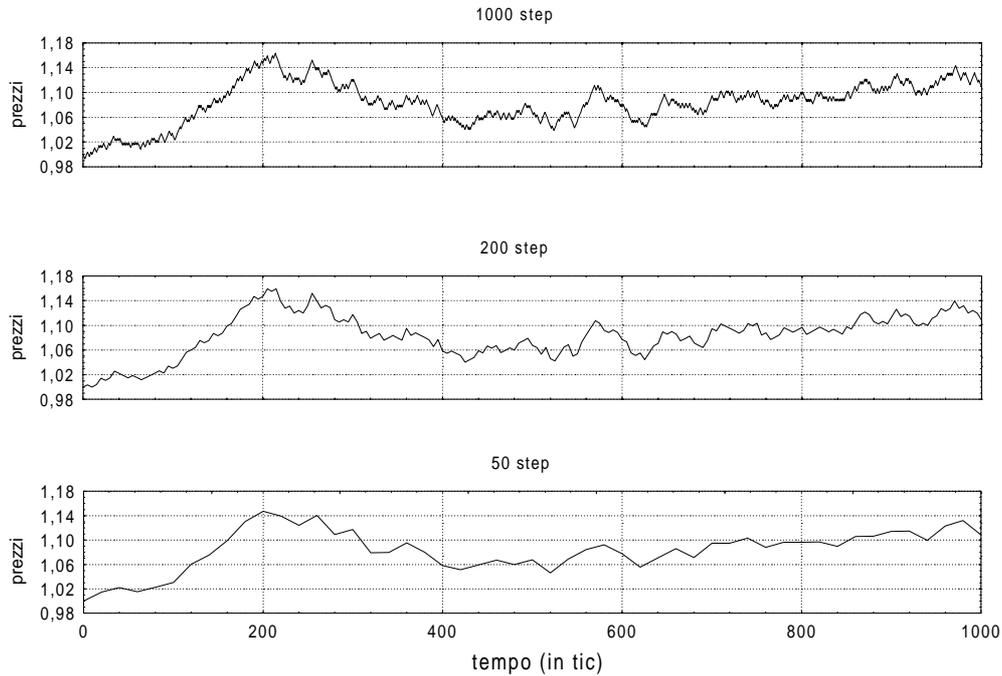


Ipotesi di *drift* del 5% e volatilità del 15,7% (base annua). Processo di 60 *step* giornalieri. I valori sull'asse verticale sono i prezzi in scala logaritmica.

Fino ad ora abbiamo misurato il tempo con un'unità arbitraria indivisibile di lunghezza pari allo *step*. Siamo così riusciti a compattare le formule. Ora è giunto il momento di generalizzare tale misura per esplicitare le importanti relazioni che legano le distribuzioni di nostro interesse al trascorrere del tempo e alla risoluzione della scala temporale.

Riprendiamo il modello e ipotizziamo uno *step*  $\Delta t$  pari a 1 *tic*, cioè al più piccolo intervallo tra due prezzi successivi che si possa immaginare. Siano i parametri che generano il processo  $a = E(h)$  e  $b = v$ . Con un adeguato dispositivo simuliamo 1000 incrementi aleatori del processo dei ritorni. Con una *routine* di generazione di numeri casuali abbiamo ottenuto uno tra i numerosissimi percorsi possibili<sup>3</sup> che rappresentiamo graficamente per tre diversi intervalli di campionamento (vedi figura 2.1.3).

<sup>3</sup> Il numero di percorsi raddoppia ad ogni *step* per cui nel nostro caso è pari a  $2^{1000} \cong 1,07 \times 10^{301}$ . Per le ipotesi fatte il numero di prezzi possibili non raddoppia ad ogni *step* perché, con volatilità costante, i rami dell'albero binomiale si ricongiungono. Sulla geometria degli alberi si tornerà in seguito.

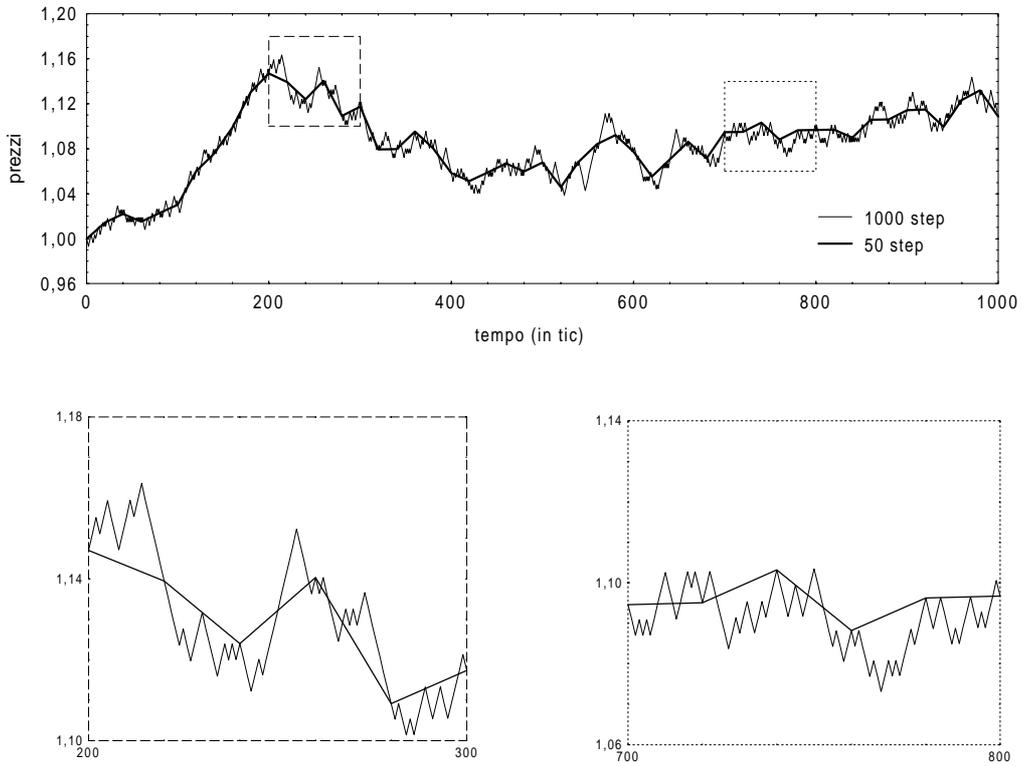
**Figura 2.1.3 - Il percorso del prezzo per vari intervalli di campionamento.**

Prezzi ottenuti generando un campione di 1000 numeri casuali da un *random walk* assumendo una vera distribuzione con ritorno atteso del 3,77% e volatilità del 15,7% (su base annua).

La forma frastagliata della traiettoria non cambia passando dal livello macroscopico (l'intera serie) a sue porzioni sempre più ristrette.

Sia questo il vero processo sottostante. Vediamo ora cosa succede cambiando la risoluzione temporale. Osserviamo a posteriori i ritorni con osservazioni meno frequenti (basta collegare sulla traiettoria, come nella figura 2.1.4, i punti tra loro distanti un numero di *tic* corrispondente alla durata dello *step* desiderato). Nella figura 2.1.3 abbiamo considerato *step* comprendenti un numero  $c$  di *tic* pari a 1, 5 e 20; il numero di *step* ( $n$ ) è pari a  $\frac{1000}{c}$ , ovvero a 1000, 200 e 50.

**Figura 2.1.4 - Forma del percorso in sottointervalli.**



Per le ipotesi si veda la figura precedente

Il profilo del processo risulta smussato per osservazioni più rade, sebbene il suo aspetto macroscopico non cambi. Con le formule [2.1.1] e [2.1.2] determiniamo le proprietà dei processi con *step* pari a multipli di 1 *tic* in funzione delle corrispondenti grandezze per *tic*. Misurando il tempo in *tic* avremo processi caratterizzati da  $n$  *step* con ritorno atteso e volatilità per *step* (per ogni  $k$ ) così determinate:

$$E[\xi(k - c, k)] = E(h) \times c$$

$$\sigma(k - c, k) = v\sqrt{c}$$

In seguito indicheremo per brevità ritorni e volatilità su *step* lunghi  $c$  *tic* con le espressioni  $\xi_c$  e  $\sigma_c$ .

Valendo, per ogni  $c$ ,  $\frac{E(\xi_c)}{c} = E(h)$  e  $\frac{\sigma_c}{\sqrt{c}} = v$ , possiamo generalizzare le relazioni tra le grandezze relative a due periodi arbitrari con durate (in *tic*) pari a  $c_1$  e  $c_2$ :

$$E(\xi_{c_1}) = E(h) \times c_1 = E(\xi_{c_2}) \times \frac{c_1}{c_2}$$

$$\sigma_{c_1} = v\sqrt{c_1} = \sigma_{c_2} \sqrt{\frac{c_1}{c_2}}$$

Queste formule sono la base per determinare ritorni attesi e volatilità **equivalenti** su intervalli di osservazione diversi. La prima conferma l'ovvia proprietà additiva dei tassi periodali in regime continuo. La seconda definisce la "regola della radice quadrata del tempo" (*t-Square rule*) fondamentale per la misura operativa della volatilità. In forza di questa regola, sappiamo di poter ottenere distribuzioni dei ritorni su un medesimo orizzonte temporale che siano equivalenti per volatilità benché caratterizzate da un diverso numero di passi. Sarà sufficiente adattare le volatilità uniperiodali in modo che siano proporzionali alla radice quadrata dell'intervallo di *step*  $\Delta t$ .

Nella specifica realizzazione del percorso visualizzato nella figura 2.1.3, si osservano valori campionari del ritorno atteso e della deviazione standard che si discostano dai "veri" parametri della distribuzione sottostante. Il ritorno realizzato si discosta sensibilmente da quello atteso. Le deviazioni standard risultano anch'esse diverse, ma con un errore più contenuto, come si osserva nella tabella seguente.

**Tabella 2.1.1 - Errore campionario nella stima della volatilità di un processo binomiale.**

**a) Parametri di costruzione del processo sottostante (base annua)**

Ritorno atteso ( $E(\xi)$ )	3,768%
Volatilità ritorni ( $\sigma$ )	15,7%
Tempo a scadenza ( $t_n$ )	0,5 anni, diviso in 1000 tic

**b) Stime del valore atteso e della volatilità dei ritorni per una realizzazione casuale del processo**

Intervallo di campionamento (Nr.tic per step)	Valori stimati (per step)		Valori stimati (base annua)	
	$E(\xi)_n$	$\sigma$	$E(\xi)_n$	$\sigma$
1	0,010%	0,351%	20,619%	15,703%
2	0,021%	0,503%	20,619%	15,894%
5	0,052%	0,795%	20,619%	15,905%
10	0,103%	1,076%	20,619%	15,219%
20	0,206%	1,485%	20,619%	14,848%

La realizzazione del processo è la stessa visualizzata nelle figure 2.1.3 e 2.1.4. Tra le osservazioni effettuate con diverse periodicità vale, con un margine di errore campionario, la relazione della radice del tempo.

Non è però molto pratico misurare il tempo in unità così brevi ed esprimere su tale base parametri statistici che risulterebbero tanto piccoli da essere difficilmente leggibili. Per avere una metrica più fruibile è sufficiente adottare un'unità temporale standard per esprimere ritorni e volatilità (nella prassi di mercato è l'anno, misurato in interi e frazioni decimali) e costruire delle formule equivalenti alle precedenti.

*Ai fini del calcolo delle volatilità l'anno viene suddiviso in un numero di giorni lavorativi di solito compreso tra 240 e 255. I giorni festivi (di mercato chiuso) non consentono di osservare variazioni di prezzo e quindi si ipotizza che il loro contributo alla volatilità sia nullo. Questa è la convenzione più semplice. Esistono nella prassi numerose tecniche di ponderazione dei periodi elementari ai fini del calcolo delle volatilità su intervalli futuri, con applicazioni di pesi variabili: ad esempio si possono pesare di più i giorni in cui si attende il rilascio di notizie rilevanti, e si può attribuire un peso anche ai giorni festivi, nei quali si possono "accumulare" nuove informazioni destinate a impattare sui prezzi alla riapertura dei mercati.*

Ridefiniamo ritorno e volatilità in funzione dei corrispondenti valori su base annua ( $\xi_a$  e  $\sigma_a$ ). Indichiamo la durata dello *step* non più in *tic*  $c$ , ma in frazioni d'anno  $\Delta t$ :

$$E(\xi_{\Delta t}) = E(\xi_a) \times \Delta t$$

$$\sigma_{\Delta t} = \sigma_a \sqrt{\Delta t}$$

*Invertendo le formule, possiamo determinare la volatilità su base annua da quella su serie di ritorni periodali, come normalmente si fa nella misura della volatilità storica. Definendo  $1/\Delta t = n$  (numero di periodi di durata  $\Delta t$  in un anno), ricaviamo:*

$$\sigma_a = \sigma_{\Delta t} \frac{1}{\sqrt{\Delta t}} = \sigma_{\Delta t} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n}}} = \sigma_{\Delta t} \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \sigma_{\Delta t} \sqrt{n}$$

**Esempio.** Una volatilità annua del 15% corrisponde a:

periodo	$n$	$\Delta t$	$\sigma_{\Delta t}$
giorno lavorativo	240	$\frac{1}{240}$	$\frac{15\%}{\sqrt{240}} = 0,97\%$
settimana	52	$\frac{1}{52}$	$\frac{15\%}{\sqrt{52}} = 2,08\%$

Una volatilità giornaliera dell'1% diventa su base annua:

$$\sigma_a = 1\% \times \sqrt{240} = 15,49\%$$

Per formulare le stime della volatilità attesa o per confrontare con un dato oggettivo la volatilità implicita nei prezzi delle opzioni si calcola la volatilità storica. Decidiamo di mostrare subito il procedimento di calcolo su prezzi osservati della volatilità storica. Questa digressione ci è utile per vedere un'applicazione della *t-Square rule*, che è una regola generale valida per i processi IID "canonici" a tempo discreto così come a tempo continuo. Utilizzeremo peraltro distribuzioni empiriche non specificate, che non si conformano certo all'ipotesi di *random walk* prima delineata.

- La **volatilità storica** è una stima campionaria della volatilità del processo stocastico dei ritorni  $\sigma$ , assumendo che  $\sigma$  sia costante nel tempo (processo stazionario).

Ci sono due metodi alternativi di stima:

- $\sigma$  **centrata**, ottenuta assumendo una media dei ritorni pari alla media  $\bar{h}$  del campione:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (h_k - \bar{h})^2} \quad \text{dove } \bar{h} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n h_k$$

- $\sigma$  **non centrata**, ottenuta assumendo una media dei ritorni posta, *a priori*, pari a 0:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n h_k^2}$$

Nella maggior parte delle applicazioni operative si preferisce usare la volatilità storica non centrata perché:

- $\bar{h}$  è statisticamente poco significativo (dipende solo dai prezzi iniziale e finale);
- applicando una media *a priori* uguale a 0 si guadagna un grado di libertà.

**Esempio.** Calcoliamo la volatilità storica basandoci sulla seguente tabella:

data	cambio lira/dollaro	ln(cambio)	$h_k$	$h_k^2$	$(h_k - \bar{h})^2$
	[ £ / \$ ]		[%]	[% %]	[% %]
1/1/98	1768,03	7,47762			
2/1/98	1774,94	7,48152	0,390	0,152	0,121
5/1/98	1792,44	7,49133	0,981	0,963	0,882
6/1/98	1798,88	7,49492	0,359	0,129	0,1
7/1/98	1791,15	7,49061	-0,431	0,185	0,223
8/1/98	1788,91	7,48936	-0,125	0,016	0,028
9/1/98	1792,11	7,49115	0,179	0,032	0,019
12/1/98	1792,11	7,49115	0,000	0	0,002
13/1/98	1790,19	7,49008	-0,107	0,011	0,022
14/1/98	1793,08	7,49169	0,161	0,026	0,014
15/1/98	1802,13	7,49672	0,503	0,253	0,213
16/1/98	1804,08	7,49781	0,108	0,012	0,004
19/1/98	1806,03	7,49889	0,108	0,012	0,004
20/1/98	1806,03	7,49889	0,000	0	0,002
21/1/98	1788,91	7,48936	-0,952	0,907	0,989
22/1/98	1775,88	7,48205	-0,731	0,534	0,598
23/1/98	1752,85	7,46900	-1,305	1,704	1,815
26/1/98	1769,91	7,47868	0,969	0,938	0,858
27/1/98	1767,41	7,47727	-0,141	0,02	0,034
28/1/98	1787,95	7,48882	1,155	1,335	1,24
29/1/98	1803,1	7,49726	0,844	0,712	0,643
30/1/98	1806,03	7,49889	0,162	0,026	0,014
2/2/98	1795,01	7,49277	-0,612	0,375	0,428
3/2/98	1788,91	7,48936	-0,340	0,116	0,146
4/2/98	1779,04	7,48383	-0,553	0,306	0,354
5/2/98	1764,91	7,47585	-0,797	0,636	0,705
6/2/98	1786,03	7,48775	1,190	1,415	1,317
9/2/98	1794,69	7,49259	0,484	0,234	0,195
10/2/98	1785,08	7,48722	-0,537	0,288	0,335
11/2/98	1795,65	7,49312	0,590	0,349	0,301
12/2/98	1786,03	7,48775	-0,537	0,289	0,336
13/2/98	1795,01	7,49277	0,502	0,252	0,211
16/2/98	1795,01	7,49277	0,000	0	0,002
17/2/98	1799,86	7,49546	0,270	0,073	0,052
18/2/98	1795,01	7,49277	-0,270	0,073	0,097
19/2/98	1791,15	7,49061	-0,215	0,046	0,066
20/2/98	1795,01	7,49277	0,215	0,046	0,03
		<b>somme</b>	1,514	12,464	12,401

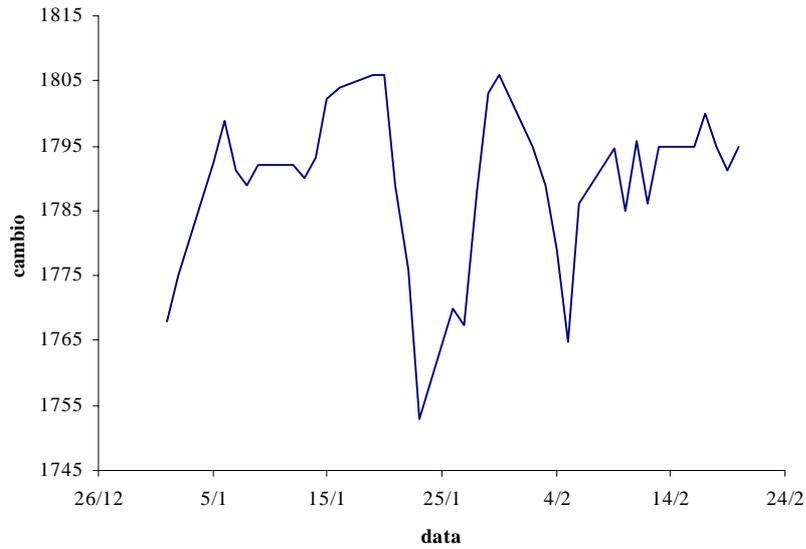
$$\bar{h} = 0,0420685\% = \ln(1795,01 / 1768,03) / 36 \text{giorni}$$

$h_k$  indica il ritorno logaritmico; per esempio in data 2/1/98:

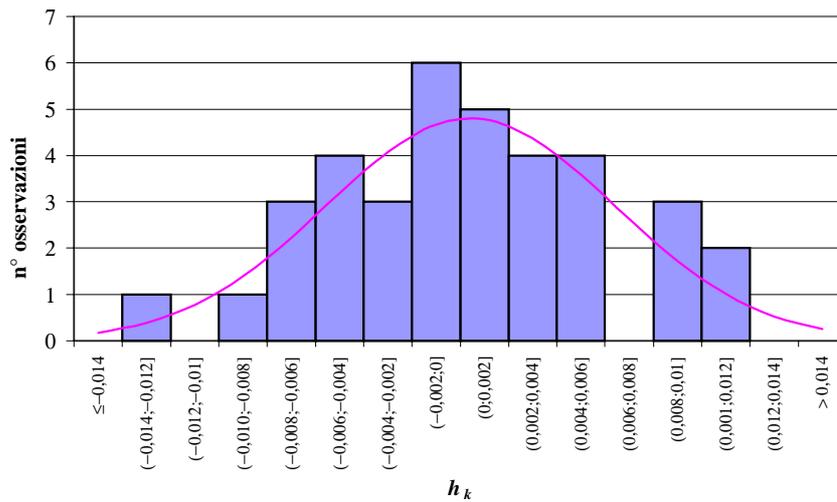
$$0,390\% = (7,48152 - 7,47762) \times 100$$

$$\bar{h} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n h_k = \frac{1,514\%}{36} = 0,042\%$$

**Figura 2.1.5 - Andamento del cambio £/\$.**



**Figura 2.1.6 - Distribuzione dei ritorni.**



Per arrivare alla rappresentazione dei ritorni abbiamo considerato delle classi di valori di ritorni giornalieri; l'istogramma indica quanti ritorni sono presenti in un dato intervallo (es. non ci sono ritorni  $\leq -0,014$ ). Sull'istogramma è tracciata una **distribuzione normale** con media e varianza pari a quelle del campione.

Determiniamo la volatilità storica **giornaliera**:

$\sigma$  centrata:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (h_k - \bar{h})^2} = \sqrt{\frac{12,401\%}{36-1}} = 0,595\%$$

$\sigma$  non centrata:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n h_k^2} = \sqrt{\frac{12,464\%}{36}} = 0,588\%$$

Ricaviamo ora la volatilità storica **annuale** (consideriamo un anno di 240 giorni lavorativi):

$$\text{volatilità annuale} = \text{volatilità giornaliera} \times \sqrt{240}$$

- $\sigma$  centrata =  $0,595\% \times \sqrt{240} = 9,218\%$ ;
- $\sigma$  non centrata =  $0,588\% \times \sqrt{240} = 9,109\%$ .

*Questa semplice aritmetica delle volatilità equivalenti si applica, è bene ribadirlo, soltanto a processi di tipo IID, ovvero stazionari e con autocorrelazione seriale nulla.*

## 2.2 Relazione tra momenti della distribuzione e durata dello step

Il passaggio al caso multiperiodale non ha finora alterato la sostanza del modello. Abbiamo semplicemente variato la metrica dei momenti della distribuzione, introducendo parametri su base annua:  $E(\xi_a)$  e  $\sigma_a$  (che indicheremo d'ora in avanti con  $E(\xi)$  e  $\sigma$ , intendendo quindi ritorni e deviazione standard espressi sempre su base annua se non altrimenti specificato).

*In questo modo standardizziamo sull'anno il periodo temporale di riferimento dei tassi ma non, si badi bene, l'intervallo di osservazione (ovvero lo step). Quest'ultimo può essere arbitrariamente lungo (o breve). I ritorni di step, con la notazione introdotta, sono indicati nel modo seguente:*

$$\xi \Delta t = \ln\left(\frac{S_{k+1}}{S_k}\right)$$

I parametri dell'albero binomiale, per qualsiasi step di durata arbitraria  $\Delta t$  anni, vanno così riformulati:

$$u = e^{E(\xi)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}}$$

$$d = e^{E(\xi)\Delta t - \sigma\sqrt{\Delta t}}$$

Mantenendo la “vera” probabilità  $p = 0,5$ , otteniamo valore atteso e varianza dei ritorni coerenti con quanto dimostrato nel capitolo precedente. Infatti, il ritorno sul prezzo atteso a livello di step, espresso con un tasso annuo, è così determinato:

$$\begin{aligned} \mu \Delta t &= \ln\left[0,5\left(e^{E(\xi)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}} + e^{E(\xi)\Delta t - \sigma\sqrt{\Delta t}}\right)\right] \\ &= \ln\left[0,5e^{E(\xi)\Delta t}\left(e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} + e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}\right)\right] \\ &= E(\xi)\Delta t + \ln\left[0,5\left(e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} + e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}\right)\right] \end{aligned}$$

Sostituendo gli esponenziali con approssimazioni in serie al secondo ordine derivate rispetto a  $\Delta t$  per  $\Delta t_0 = 0$ , otteniamo:

$$\mu \Delta t \approx \left[E(\xi) + \frac{\sigma^2}{2}\right]\Delta t$$

con approssimazione tanto più accurata quanto inferiore è  $\Delta t$ .

La regola di proporzionalità rispetto al tempo, già prima verificata per il ritorno atteso, è tendenzialmente rispettata per  $\mu$ . È inoltre confermato che  $\mu$  è superiore a  $E(\xi)$  per l'effetto "ineguaglianza di Jensen".

La variabile aleatoria "ritorno su un orizzonte di  $t_n$  anni", suddiviso in  $n$  step di durata  $\Delta t = t_n/n$ , può essere definita come funzione di una variabile aleatoria  $Y_k$  di tipo *random walk*:

$$\begin{aligned}\xi(0, t_n)t_n &= \sum_{k=1}^n \left[ E(\xi) \frac{t_n}{n} + \Delta Y_k \sigma \sqrt{\frac{t_n}{n}} \right] \\ &= E(\xi)t_n + Y_n \sigma \sqrt{\frac{t_n}{n}} \quad [2.2.1]\end{aligned}$$

dove  $t_n = n\Delta t$  e  $\xi(0, t_n)$  è un tasso annuo continuo.

Essendo  $Y_n = \sum_{k=1}^n \Delta Y_k$ , per  $p = 0,5$ , distribuito con media 0 e varianza  $n \times 1 = n$ , ne consegue che  $\xi(0, t_n)t_n$  ha una distribuzione con media  $E(\xi)t_n$  e deviazione standard  $\sigma\sqrt{t_n}$  (<sup>4</sup>). Dato  $t_n$ , al tendere a 0 di  $\Delta t$ ,  $n$  tende a infinito. Per il teorema del limite centrale  $Y_n$  tende verso una distribuzione normale con media 0 e varianza  $n$ ;  $\xi(0, t_n)t_n$  si conforma quindi ad una distribuzione normale con media  $E(\xi)t_n$  e deviazione standard  $\sigma\sqrt{t_n}$ . Essendo il ritorno mappato sul logaritmo del prezzo finale, anche tale logaritmo sarà distribuito secondo una normale. Il prezzo, di conseguenza, segue una distribuzione lognormale, essendo una variabile aleatoria il cui logaritmo naturale è distribuito normalmente.

Più complicata è la determinazione del ritorno sul prezzo atteso su un orizzonte  $t_n$ :  $\mu(0, t_n)$ . A tale scopo dobbiamo anticipare un risultato che viene formalizzato e approfondito più avanti nel paragrafo 3.3, la cosiddetta legge della torre: i valori attesi di un processo proiettati su una sequenza di epoche future sono come impilati l'uno sull'altro. Il tasso di *drift* uniperiodale  $\mu \times \Delta t$  collega non soltanto il prezzo iniziale al valore atteso del prezzo fra uno step, ma anche quest'ultimo al valore atteso tra due step, e così via sino a raggiungere il prezzo atteso fra  $n$  step. In formule, su un orizzonte  $t_n$  raggiunto con  $n$  step, abbiamo:

$$E[S_n] = S_0 \prod_{k=1}^n e^{\mu\Delta t}$$

dove  $\mu$  è un tasso annuo continuo.

Per le restrizioni poste, i parametri che influenzano  $\mu$  non cambiano nel tempo, quindi possiamo ricavare il ritorno sul prezzo atteso in  $t_n$ ,  $\mu(0, t_n)$ , con la formula seguente:

$$\mu(0, t_n)t_n = \ln \left[ \frac{E(S_n)}{S_0} \right] = n(\mu\Delta t) = \frac{t_n}{\Delta t} (\mu\Delta t) = \mu t_n$$

---

<sup>4</sup> Precisamente:

$$\begin{aligned}E[\xi(0, t_n)t_n] &= E(\xi)t_n + \sigma \sqrt{\frac{t_n}{n}} \times 0 = E(\xi)t_n \\ \sigma^2[\xi(0, t_n)t_n] &= \sigma^2 \frac{t_n}{n} n = \sigma^2 t_n \\ \sigma[\xi(0, t_n)t_n] &= \sqrt{\sigma^2 t_n} = \sigma \sqrt{t_n}\end{aligned}$$

Ricordando che, per ogni *step*,  $\mu\Delta t = E(\xi)\Delta t + \ln\left[0,5(e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} + e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}})\right]$  possiamo riscrivere:

$$\mu(0, t_n)t_n = \frac{t_n}{\Delta t} \left\{ E(\xi)\Delta t + \ln\left[0,5(e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} + e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}})\right] \right\}$$

espressione che, per  $n \rightarrow \infty$  e  $\Delta t \rightarrow 0$ , tende alla forma seguente:

$$\mu(0, t_n)t_n \approx \frac{t_n}{\Delta t} \left[ E(\xi)\Delta t + \frac{\sigma^2}{2} \Delta t \right] \approx \left[ E(\xi) + \frac{\sigma^2}{2} \right] t_n$$

Il ritorno sul prezzo atteso tende quindi a variare in proporzione lineare dell'orizzonte di riferimento. Si osserva di nuovo la diseguaglianza di Jensen in azione.

*La proporzionalità di  $\mu$  rispetto al tempo non è una meccanica estensione dell'analogia proprietà di  $E(\xi)$ . Quest'ultima vale in modo esatto per qualsiasi  $\Delta t$  ed è banalmente verificata per la proprietà della somma di variabili casuali. Nel caso di  $\mu$ , invece, la relazione è approssimata (tende a risultare esatta al tendere a 0 di  $\Delta t$ ) ed è tendenzialmente verificata in virtù di una meno scontata legge probabilistica (la legge della torre).*

Possiamo ora estendere le nostre conclusioni al caso *risk neutral*. Il vincolo relativo, indicando con  $r$  il tasso di riporto, è così riformulato per un singolo *step*:

$$E_Q(S) = S_0 e^{r\Delta t}$$

La misura  $q$  è così espressa in funzione di  $\Delta t$  (<sup>5</sup>):

$$q = \frac{e^{[r-E(\xi)]\Delta t} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}$$

La distribuzione *risk neutral* multiperiodale consente di ricavare immediatamente il ritorno sul prezzo atteso per qualsiasi orizzonte  $t_n$ . Tale grandezza, in costanza di tasso  $r$ , è per costruzione pari a  $r \times t_n$ . E' più macchinoso determinare il valore atteso e la volatilità dei ritorni. Partiamo dalla definizione del processo del ritorno su un orizzonte  $t_n$  (adattando l'espressione 2.2.1):

$$\xi(0, t_n)t_n = E(\xi)t_n + Y_{Q,n}\sigma\sqrt{\frac{t_n}{n}}$$

$Y_{Q,n}$  è una variabile aleatoria con media  $n(2q - 1)$  e varianza  $4nq(1 - q)$ <sup>6</sup>. Di conseguenza la sua trasformazione lineare  $\xi(0, t_n)$  ha una distribuzione così caratterizzata:

<sup>5</sup> La formula si ricava analogamente al caso uniperiodale partendo da:  $q = \frac{F - S_d}{S_u - S_d}$ .

In tale espressione sostituiamo:

$$F = S_0 e^{r\Delta t} \quad S_d = S_0 e^{E(\xi)\Delta t - \sigma\sqrt{\Delta t}} \quad S_u = S_0 e^{E(\xi)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}}$$

Otteniamo:

$$q = \frac{S_0 e^{r\Delta t} - S_0 e^{E(\xi)\Delta t - \sigma\sqrt{\Delta t}}}{S_0 e^{E(\xi)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}} - S_0 e^{E(\xi)\Delta t - \sigma\sqrt{\Delta t}}} = \frac{e^{-E(\xi)\Delta t} \left[ e^{r\Delta t} - e^{E(\xi)\Delta t - \sigma\sqrt{\Delta t}} \right]}{e^{-E(\xi)\Delta t} \left[ e^{E(\xi)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{E(\xi)\Delta t - \sigma\sqrt{\Delta t}} \right]} = \frac{e^{[r-E(\xi)]\Delta t} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}$$

<sup>6</sup> Ciò si dimostra poiché  $Y_{Q,n} = \sum_{k=1}^n \Delta Y_{Q,k}$ , con  $\Delta Y_{Q,k}$  avente media  $(2q - 1)$  e varianza  $4q(1 - q)$ .

$$E_Q[\xi(0, t_n)]_{t_n} = E(\xi)t_n + n(2q-1)\sigma\sqrt{\frac{t_n}{n}}$$

$$\sigma_Q^2[\xi(0, t_n)]_{t_n}^2 = \sigma^2 \frac{t_n}{n} 4nq(1-q)$$

$$\sigma_Q[\xi(0, t_n)]_{t_n} = \sqrt{\sigma^2 \frac{t_n}{n} 4nq(1-q)} = \sqrt{4nq(1-q)}\sigma\sqrt{\frac{t_n}{n}}$$

Le formulazioni appena ottenute non paiono riconducibili a casi noti. Possiamo renderle più chiare lavorando su loro versioni approssimate la cui precisione aumenta al ridursi dello *step* per tendere alle formule esatte verificate nel caso continuo. Privilegiando la concisione sul rigore matematico, riesprimiamo  $q$  sostituendo agli esponenziali le espansioni in serie derivate rispetto a  $\Delta t$  per  $\Delta t_0 = 0$ , arrestandoci al primo ordine per i termini contenenti  $\Delta t$  (che diminuiscono più in fretta) e al secondo per quelli comprendenti  $\sqrt{\Delta t}$ . Otteniamo<sup>7</sup>:

$$q = \frac{1}{2} - \frac{E(\xi) + \frac{\sigma^2}{2} - r}{2\sigma} \sqrt{\Delta t} \quad [2.2.2]$$

Sostituiamo l'espressione ricavata per  $q$  nell'equazione che identifica il ritorno atteso<sup>8</sup>, ottenendo:

$$E_Q[\xi(0, t_n)]_{t_n} \approx E(\xi)t_n + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t_n - E(\xi)t_n \approx \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t_n$$

<sup>7</sup> I passaggi sono i seguenti:

$$\begin{aligned} q &= \frac{e^{[r-E(\xi)]\Delta t} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}} \approx \frac{\{1 + [r-E(\xi)]\Delta t\} - \left(1 - \sigma\sqrt{\Delta t} + \frac{\sigma^2\Delta t}{2}\right)}{\left(1 + \sigma\sqrt{\Delta t} + \frac{\sigma^2\Delta t}{2}\right) - \left(1 - \sigma\sqrt{\Delta t} + \frac{\sigma^2\Delta t}{2}\right)} \\ &= \frac{[r-E(\xi)]\Delta t + \left(\sigma\sqrt{\Delta t} - \frac{\sigma^2\Delta t}{2}\right)}{2\sigma\sqrt{\Delta t}} = \frac{\left[r - \frac{\sigma^2}{2} - E(\xi)\right]\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}}{2\sigma\sqrt{\Delta t}} = \frac{\left[r - \frac{\sigma^2}{2} - E(\xi)\right]\sqrt{\Delta t}\sqrt{\Delta t}}{2\sigma\sqrt{\Delta t}} + \frac{\sigma\sqrt{\Delta t}}{2\sigma\sqrt{\Delta t}} = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\left[r - \frac{\sigma^2}{2} - E(\xi)\right]\sqrt{\Delta t}}{2\sigma} = \frac{1}{2} - \frac{E(\xi) + \frac{\sigma^2}{2} - r}{2\sigma} \sqrt{\Delta t} \end{aligned}$$

<sup>8</sup> Riportiamo per maggior chiarezza lo sviluppo per i termini contenenti  $q$ :

$$2q-1 \approx 2 \times \left\{ \frac{\left[r - \frac{\sigma^2}{2} - E(\xi)\right]\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}}{2\sigma\sqrt{\Delta t}} \right\} - 1 \approx \frac{\left[r - \frac{\sigma^2}{2} - E(\xi)\right]\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t} - \sigma\sqrt{\Delta t}}{\sigma\sqrt{\Delta t}} \approx \frac{\left[r - \frac{\sigma^2}{2} - E(\xi)\right]\Delta t}{\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

Tenendo presente che  $\Delta t = \frac{t_n}{n}$ , otteniamo:

$$n(2q-1)\sigma\sqrt{\frac{t_n}{n}} \approx n \frac{\left[r - \frac{\sigma^2}{2} - E(\xi)\right]\frac{t_n}{n}}{\sigma\sqrt{\frac{t_n}{n}}} \sigma\sqrt{\frac{t_n}{n}} \approx \left[r - E(\xi) - \frac{\sigma^2}{2}\right]t_n$$

Il ritorno atteso è pari al ritorno sul prezzo atteso sotto  $\mathbb{Q}$  (ovvero  $r$ ) diminuito di metà della varianza dei ritorni della vera distribuzione sotto  $\mathbb{P}$ , con ulteriore conferma della disuguaglianza di Jensen.

Si dimostra che per  $\Delta t \rightarrow 0$   $q(1 - q)$  tende a  $\frac{1}{4}$  <sup>(9)</sup>, perciò  $\sigma_Q(0, t_n)$  tende a  $\sqrt{n}\sigma\sqrt{\frac{t_n}{n}} = \sigma\sqrt{t_n}$ , lo stesso valore della vera distribuzione.

*Come  $q(1 - q)$  tende a  $1/4$  anche  $q$  tende a  $1/2$  per  $\Delta t \rightarrow 0$ . Perché allora non abbiamo ottenuto  $E_Q[\xi(0, t_n)]_{t_n} = E(\xi)_{t_n}$  azzerando  $(2q - 1)$ ? La differenza sta nel fatto che nel calcolo del valore atteso il termine  $E(\xi)$ , presente al numeratore di  $q$ , determina un'espressione che si elide perfettamente con il primo addendo della formula. Inoltre  $q(1 - q)$  tende a  $1/4$  più velocemente di quanto  $q$  tenda a  $1/2$ .*

Quanto alla forma della distribuzione *risk neutral* asintotica (marginale) dei ritorni per  $\Delta t \rightarrow 0$ , si ottiene per il teorema del limite centrale ancora una normale con media diversa dalla vera distribuzione  $\left[ \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t_n \right]$ , ma con uguale deviazione standard  $\left[ \sigma\sqrt{t_n} \right]$ .

Riepiloghiamo i risultati ottenuti nella tabella seguente:

---

<sup>9</sup> Ciò si dimostra essendo:

$$q \approx \frac{1}{2} + \frac{\left[ r - \frac{\sigma^2}{2} - E(\xi) \right] \sqrt{\Delta t}}{2\sigma}$$

Il secondo addendo tende a 0 per  $\Delta t \rightarrow 0$ . Quindi  $q$  tende a  $\frac{1}{2}$  per  $\Delta t \rightarrow 0$ .

Ancor più velocemente  $q(1 - q)$  tende a  $\frac{1}{4}$ . Infatti:

$$1 - q \approx \frac{1}{2} - \frac{\left[ r - \frac{\sigma^2}{2} - E(\xi) \right] \sqrt{\Delta t}}{2\sigma} \Rightarrow q(1 - q) \approx \frac{1}{4} - \frac{\left[ r - \frac{\sigma^2}{2} - E(\xi) \right]^2 \Delta t}{4\sigma^2}$$

**Tabella 2.2.1 - Distribuzioni dei ritorni spot su un orizzonte di  $t_n$  anni.**

	<b>Vera distribuzione</b>	<b>Distribuzione <i>risk neutral</i></b>
<b>forma</b>	binomiale tendente a normale	Binomiale tendente a normale
<b>processo</b>	generato con fattori di variazione pari a: $u = e^{E(\xi)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}}$ $d = e^{E(\xi)\Delta t - \sigma\sqrt{\Delta t}}$	fattori di variazione uguali alla vera distribuzione
<b>probabilità di rialzo</b>	$p = \frac{1}{2}$ valore fissato <i>a priori</i>	$q \cong \frac{1}{2} - \frac{E(\xi) + \frac{\sigma^2}{2} - r}{2\sigma} \sqrt{\Delta t}$ approssimazione con serie di Taylor
<b>ritorno atteso</b>	$\underbrace{E(\xi)t_n}_{\text{esatto}} \cong \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t_n$ limite per $\Delta t \rightarrow 0$	$\left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t_n$ limite per $\Delta t \rightarrow 0$
<b>deviazione standard dei ritorni</b>	$\sigma\sqrt{t_n}$ esatta	$\sigma\sqrt{t_n}$ limite per $\Delta t \rightarrow 0$
<b>ritorno sul prezzo atteso</b>	$\underbrace{\mu t_n}_{\text{esatto}} \cong \left[ E(\xi) + \frac{\sigma^2}{2} \right] t_n$ limite per $\Delta t \rightarrow 0$	$rt_n$ esatto, per rispetto del vincolo: $E[S_k] = F(k)_0$

Il lettore si sarà chiesto perché si sia utilizzato un simbolo “pesante” come  $E(\xi)$  per il ritorno atteso, che è una grandezza usata molto spesso (è uno dei parametri dell’albero) ed uno più leggero, come  $\mu$ , per il ritorno sul prezzo atteso. Ci sono tre ragioni: (1) serve a ribadire che  $E(\xi)$  è un valore atteso ( $\mu$  invece non è un valore atteso); (2) la seconda riguarda il caso *risk neutral*, dove  $\mu = r$  è un dato esogeno, mentre  $E_Q(\xi)$  si ricava come dato “elaborato”; (3) la terza ragione tiene conto delle variabili usate nel continuo, dove il tasso di drift  $\mu$  è un parametro di costruzione che consente di determinare il ritorno sul prezzo atteso  $\mu t_n$ , mentre il ritorno atteso si ricava come  $(\mu - \sigma^2/2)t_n$ . Insomma, il ritorno atteso è una variabile di derivazione non immediata che giustifica un simbolo più “pesante”.

Ci conforta quindi rilevare che il cambio di misura da  $\mathbb{P}$  a  $\mathbb{Q}$  altera in misura tendenzialmente irrilevante la volatilità della distribuzione. Questo ci agevola perché consente di semplificare i modelli nel continuo, fondendo due variabili in una. Inoltre questo risultato ci legittima a stimare le volatilità *risk neutral* (sulle quali si basano i modelli di *pricing*) in base alle volatilità storiche, che sono campionamenti della vera distribuzione, confidando in una buona approssimazione, ed anche ad utilizzare la volatilità implicita come stime della “vera” volatilità attesa.

## 2.3 Estensione alle distribuzioni *forward*

La replica con arbitraggi senza rischio richiede l'esistenza di un mercato *forward* efficiente sul sottostante. Strategie e condizioni di equilibrio sono in tal caso riferibili, secondo modalità differenziate ma finanziariamente equivalenti, a prezzi e posizioni sia *spot* che *forward*. È quindi utile allenarsi a passare con sicurezza e disinvoltura da una dimensione all'altra. Per semplificare le formule, ipotizziamo per un contratto *forward* con scadenza  $t_n$  e valutato in  $t_k$  un valore di equilibrio determinato in base a un tasso di riporto netto  $r$  costante nel tempo e non differenziato per scadenze.

*La seconda ipotesi di uniformità di  $r$  per scadenze serve solo a semplificare la notazione: può essere rimossa senza inficiare la generalità del modello. L'ipotesi di costanza dei tassi repo è più forte e può essere giustificata: (1) dalla scarsissima rilevanza degli shock di tasso sul processo forward (giudizio corretto su contratti a scadenza breve); (2) dalla possibilità di adottare tecniche che immunizzano la strategia dal rischio di tasso con idonee operazioni di copertura.*

Con la semplificazione accennata possiamo scrivere:

$$F(n)_k = S_k e^{r(t_n - t_k)} \quad [2.3.1]$$

dove  $F(x)_j$  indica un *forward* con scadenza in  $t_x$ , valutato in  $t_j$ .

Il premio/sconto tra *forward* e *spot* espresso come tasso logaritmico è proporzionale al tasso *repo* e al tempo a scadenza:

$$\ln \left[ \frac{F(n)_k}{S_k} \right] = \ln \left[ \frac{S_k e^{r(t_n - t_k)}}{S_k} \right] = r(t_n - t_k)$$

Ora, essendo  $S_k$  una variabile aleatoria funzione di un valore iniziale e di un processo *random walk*:

$$S_k = S_0 e^{E(\xi)_{t_k} + Y(k)\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

ricaviamo la formula per il processo del prezzo *forward* tenendo presente che  $F_0 = S_0 e^{rt_n}$ :

$$\begin{aligned} F(n)_k &= S_0 e^{E(\xi)_{t_k} + Y(k)\sigma\sqrt{\Delta t}} e^{r(t_n - t_k)} = S_0 e^{E(\xi)_{t_k} + rt_n - rt_k + Y(k)\sigma\sqrt{\Delta t}} = S_0 e^{rt_n + [E(\xi) - r]_{t_k} + Y(k)\sigma\sqrt{\Delta t}} \\ &= F_0 e^{[E(\xi) - r]_{t_k} + Y(k)\sigma\sqrt{\Delta t}} \end{aligned}$$

Alla scadenza  $t_n$  i due processi coincidono per la fungibilità perfetta tra i due contratti, ovvero si verifica in qualsiasi stato:

$$F(n)_n = S_n$$

Prima della scadenza i processi sono ugualmente mappabili e convertibili l'uno sull'altro grazie alla formula [2.3.1].

I ritorni calcolati sui prezzi *forward* hanno molto in comune con i ritorni *spot*. Su un orizzonte uniperiodale abbiamo:

$$\ln \left[ \frac{F(n)_{k+1}}{F(n)_k} \right] = \ln \left[ \frac{S_{k+1} e^{r(t_n - t_{k+1})}}{S_k e^{r(t_n - t_k)}} \right] = E(\xi) \Delta t + \Delta Y_{k+1} \sigma \sqrt{\Delta t} - r \Delta t \quad (10)$$

Pertanto:

- ritorno in caso di **rialzo** =  $[E(\xi) - r] \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t}$  ;
- ritorno in caso di **ribasso** =  $[E(\xi) - r] \Delta t - \sigma \sqrt{\Delta t}$  .

Il ritorno uniperiodale ha una componente attesa pari a quella dello *spot* ridotta del tasso *repo*, più una componente stocastica perfettamente identica al caso *spot*. La differenza tra i ritorni uniperiodali (*spot* meno *forward*), deterministica e costante nel tempo, è pari a  $r \Delta t$  e misura la velocità di convergenza tra i due prezzi, con lo *spot* che converge dal basso se  $r > 0$  ( $S < F$ ), dall'alto nel caso opposto.

Il ritorno *forward* su un orizzonte  $t_k$  ha le seguenti definizioni di processo, valore atteso e deviazione standard data una misura  $p$ :

$$\ln \left[ \frac{F(n)_k}{F(n)_0} \right] = [E(\xi) - r] t_k + Y_k \sigma \sqrt{\Delta t} \quad (11)$$

$$\text{valore atteso} = [E(\xi) - r] t_k + (2p - 1) \sigma \sqrt{t_k} = [E(\xi) - r] t_k \quad \text{per } p = 0,5$$

$$\text{deviazione standard} = 4p(1 - p) \sigma \sqrt{t_k} = \sigma \sqrt{t_k} \quad \text{per } p = 0,5$$

Il ritorno atteso differisce dal caso *spot* per  $rt_k$  e le volatilità dei ritorni *spot* e *forward* coincidono. Quest'ultima osservazione è importante perché rende intercambiabili perfettamente (nel nostro caso teorico) o quasi (nella pratica) le due volatilità.

Resta da verificare più specificamente il comportamento della distribuzione *risk neutral*. La distribuzione *forward* può dirsi *neutrale al rischio* quando il valore atteso del *forward* espresso oggi per qualsiasi istante futuro è uguale alla quotazione corrente. In formule:

$$E[F(n)_k] = F(n)_0$$

Partiamo dalla constatazione ovvia che la probabilità  $q$ , che eguaglia il valore atteso *spot* a un periodo al *forward* con pari scadenza, soddisfa l'uguaglianza riferita al valore atteso *forward*, visto che a un periodo i due processi coincidono. Non solo, ma anche disponendo del processo *forward* possiamo calcolare  $q$  in base a  $F_0$ ,  $F_u$  e  $F_d$ , ottenendo un valore uguale a quello desunto dal corrispondente processo *spot*. Lo dimostriamo usando la notazione breve del caso uniperiodale. Infatti, risulta:

<sup>10</sup> Vediamo come si arriva a quest'ultima espressione:

$$\begin{aligned} \ln \left[ \frac{S_{k+1} e^{r(t_n - t_{k+1})}}{S_k e^{r(t_n - t_k)}} \right] &= \ln \left[ \frac{S_0 e^{E(\xi)t_{k+1} + Y(k+1)\sigma\sqrt{\Delta t}} e^{r(t_n - t_{k+1})}}{S_0 e^{E(\xi)t_k + Y(k)\sigma\sqrt{\Delta t}} e^{r(t_n - t_k)}} \right] = \ln \left[ \frac{e^{E(\xi)t_{k+1} + Y(k+1)\sigma\sqrt{\Delta t} + r(t_n - t_{k+1})}}{e^{E(\xi)t_k + Y(k)\sigma\sqrt{\Delta t} + r(t_n - t_k)}} \right] \\ &= E(\xi)t_{k+1} + Y(k+1)\sigma\sqrt{\Delta t} + r(t_n - t_{k+1}) - E(\xi)t_k - Y(k)\sigma\sqrt{\Delta t} - r(t_n - t_k) \\ &= E(\xi)\Delta t + \Delta Y_{k+1} \sigma \sqrt{\Delta t} - r \Delta t \end{aligned}$$

<sup>11</sup> Riportiamo i passaggi:

$$\begin{aligned} \ln \left[ \frac{F(n)_k}{F(n)_0} \right] &= \ln \left[ \frac{S_k e^{r(t_n - t_k)}}{S_0 e^{rt_n}} \right] = \ln \left[ \frac{S_0 e^{E(\xi)t_k + Y(k)\sigma\sqrt{\Delta t} + r(t_n - t_k)}}{S_0 e^{rt_n}} \right] \\ &= E(\xi)t_k + Y(k)\sigma\sqrt{\Delta t} + rt_n - rt_k - rt_n = [E(\xi) - r] t_k + Y_k \sigma \sqrt{\Delta t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 q &= \frac{F_0 - F_d}{F_u - F_d} = \frac{F_0 - F_0 e^{[E(\xi)-r]\Delta t - \sigma\sqrt{\Delta t}}}{F_0 e^{[E(\xi)-r]\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}} - F_0 e^{[E(\xi)-r]\Delta t - \sigma\sqrt{\Delta t}}} = \frac{1 - e^{[E(\xi)-r]\Delta t - \sigma\sqrt{\Delta t}}}{e^{[E(\xi)-r]\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{[E(\xi)-r]\Delta t - \sigma\sqrt{\Delta t}}} \\
 &= \frac{e^{[r-E(\xi)]\Delta t} \{1 - e^{[E(\xi)-r]\Delta t - \sigma\sqrt{\Delta t}}\}}{e^{[r-E(\xi)]\Delta t} \{e^{[E(\xi)-r]\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{[E(\xi)-r]\Delta t - \sigma\sqrt{\Delta t}}\}} = \frac{e^{[r-E(\xi)]\Delta t} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}} = \frac{F_0 - S_d}{S_u - S_d}
 \end{aligned}$$

Viene quindi ribadita l'intercambiabilità tra i processi.

In forza dell'uguaglianza tra i valori di  $q$  per le due distribuzioni *risk neutral*, possiamo, con semplici modifiche, estendere al *forward* le conclusioni sul comportamento asintotico (al tendere a 0 di  $\Delta t$ ) della distribuzione dei ritorni e delle relative proprietà. La seguente tabella, analoga alla precedente tabella 2.2.1, riassume le conclusioni raggiunte (si omette la dimostrazione), aggiungendo a quanto detto le formule del ritorno sul prezzo atteso (che è ovviamente nullo nel caso *risk neutral*).

**Tabella 2.3.2 - Distribuzione dei ritorni *forward* su un orizzonte di  $t_n$  anni.**

	<b>Vera distribuzione</b>	<b>Distribuzione <i>risk neutral</i></b>
<b>forma</b>	binomiale tendente a normale	binomiale tendente a normale
<b>processo</b>	generato con fattori di variazione pari a: $u = e^{[E(\xi)-r]\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}}$ $d = e^{[E(\xi)-r]\Delta t - \sigma\sqrt{\Delta t}}$	fattori di variazione uguali alla vera distribuzione
<b>probabilità binomiale di rialzo</b>	$p = \frac{1}{2}$ valore fissato <i>a priori</i>	$q \cong \frac{1}{2} - \frac{E(\xi) + \frac{\sigma^2}{2} - r}{2\sigma} \sqrt{\Delta t}$ approssimazione con serie di Taylor
<b>ritorno atteso</b>	$\underbrace{[E(\xi) - r]t_n}_{\text{esatto}} \cong \underbrace{\left(\mu - r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t_n}_{\text{limite per } \Delta t \rightarrow 0}$	$-\frac{\sigma^2}{2}t_n$ limite per $\Delta t \rightarrow 0$
<b>deviazione standard dei ritorni</b>	$\sigma\sqrt{t_n}$ esatta	$\sigma\sqrt{t_n}$ limite per $\Delta t \rightarrow 0$
<b>ritorno sul prezzo atteso</b>	$\underbrace{(\mu - r)t_n}_{\text{esatto}} \cong \underbrace{\left[E(\xi) - r + \frac{\sigma^2}{2}\right]t_n}_{\text{limite per } \Delta t \rightarrow 0}$	0 esatto per rispetto del vincolo: $E[F(n)_k] = F(n)_0$

Anche i fattori di variazione  $u$  e  $d$  sono legati da relazioni ben specificabili. Infatti si può facilmente verificare (indicando con  $S$  e  $F$  rispettivamente i fattori dei processi spot e forward) che:

$$u_F = u_S e^{-r\Delta t} \quad d_F = d_S e^{-r\Delta t} \quad (12)$$

Si può notare che per il processo forward vale il vincolo di ricombinazione dei nodi:

$$u_F d_F = u_S d_S e^{-2r\Delta t} = e^{2[E(\xi)-r]\Delta t}$$

Infine, come corollario, precisiamo il comportamento congiunto dei ritorni su due contratti *forward* con medesimo sottostante e scadenze diverse  $t_n$  e  $t_m$  con  $n > m$ . I prezzi di equilibrio in un mondo di tassi *repo* uniformi e costanti sono legati da un fattore di proporzionalità costante pari a  $e^{r(t_n-t_m)}$ . Infatti:

$$F(n)_k = S_k e^{rt_n} = S_k e^{rt_m} e^{r(t_n-t_m)} = F(m)_k e^{r(t_n-t_m)}$$

I rapporti tra prezzi in due momenti successivi sono quindi identici per i due processi, così come, di conseguenza, i ritorni relativi. Si arriva quindi alla seguente conclusione: i *forward* con medesimo sottostante e scadenze diverse condividono le proprietà della distribuzione dei ritorni (ovviamente fino alla scadenza che fa estinguere il contratto più breve).

---

<sup>12</sup> Riportiamo i passaggi:

$$\begin{aligned} u_F &= e^{[E(\xi)-r]\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}} & u_S &= e^{E(\xi)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}} \\ u_F &= u_S e^{-r\Delta t} = e^{E(\xi)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}} e^{-r\Delta t} = e^{[E(\xi)-r]\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}} \\ u_S d_S e^{-2r\Delta t} &= e^{E(\xi)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}} e^{E(\xi)\Delta t - \sigma\sqrt{\Delta t}} e^{-2r\Delta t} = e^{E(\xi)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t} + E(\xi)\Delta t - \sigma\sqrt{\Delta t} - 2r\Delta t} = e^{2[E(\xi)-r]\Delta t} \end{aligned}$$



# Capitolo 3 - Valutazioni con alberi binomiali multiperiodo

## 3.1 Valutazioni con alberi multiperiodo

Volutamente, abbiamo esteso il modello al caso multiperiodale senza approfondire i procedimenti numerici di costruzione dell'albero e di calcolo delle proprietà. Si è preferito sviluppare il ragionamento sotto la guida di principi statistici generali, che sono verificati nel continuo o con altre tecniche numeriche (come le simulazioni Monte Carlo) che non si approfondiscono in questo *paper*. Abbiamo acquisito gli elementi per calcolare la volatilità di una distribuzione e della sua trasformazione *risk neutral*. Si tratta ora di esplicitare i comportamenti da seguire per replicare e valutare correttamente i derivati sotto certe ipotesi di volatilità. A tale scopo è bene ritornare alle tecniche degli alberi per cercare una conferma delle conclusioni raggiunte e soprattutto per avere una rappresentazione dinamica e intuitiva del processo dei prezzi.

*Il lettore che abbia familiarità con il pricing delle opzioni può saltare questo paragrafo.*

Se prima la metafora in cui si ambientava la trattazione era quella di un gioco di fortuna di cui seguivamo l'esito lancio dopo lancio, ora vogliamo disegnare nello spazio degli eventi che si sviluppa nel tempo una sorta di mappa, o di scacchiera, sulla quale tracciare i percorsi guidati dalla successione degli eventi (nel discreto è possibile farlo in modo preciso). Seguiremo lo stesso metodo con il quale si impara un gioco da tavolo (come la dama cinese, o la tavola a mulino). Prevediamo due livelli:

- per giungere al livello di *principianti*, descriveremo dapprima le regole, ovvero lo scopo del gioco (replicare e valutare un derivato) e le mosse fondamentali (calcolare ed aggiustare la copertura), con l'ausilio di esempi elementari;
- per fare il salto di qualità verso il livello di *apprendisti*, passiamo a descrivere alcune regole o uniformità dei meccanismi del gioco non immediatamente intuibili per un principiante; potremo così ricondurre a casi o regole generali situazioni apparentemente complesse e differenziate. Nello specifico, impareremo a trasformare i processi in particolari distribuzioni neutrali al rischio, le *martingale*, per convincerci definitivamente della corrispondenza tra *pricing* di una strategia di replica e valutazione neutrale al rischio, e dell'importanza, al riguardo, di una corretta misura della volatilità.

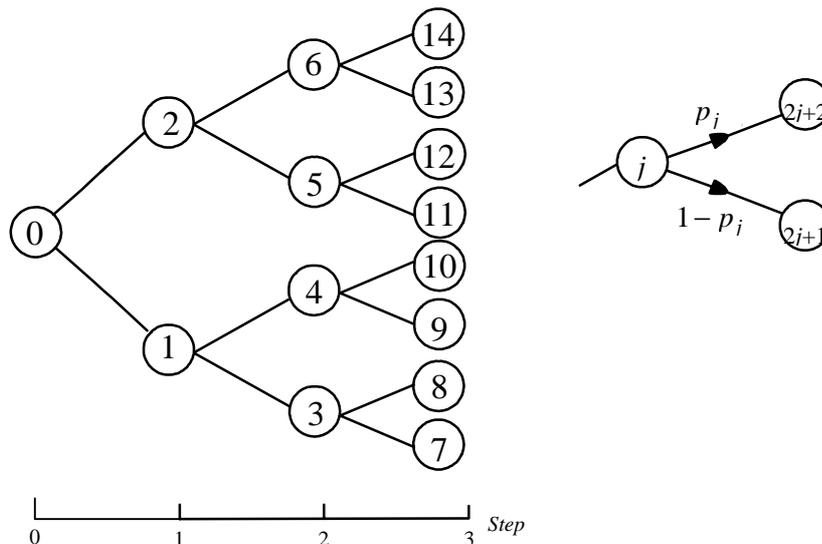
Per fare un'analogia, in una partita a briscola un giocatore ingenuo non tiene a mente le carte giocate, né si sforza di prevedere le strategie dell'avversario: così facendo egli interpreta erroneamente come casuali mosse che invece hanno una prevedibilità crescente man mano che si avvicina il termine del gioco. Anche nel nostro gioco, è importante capire le determinanti e il senso di ogni mossa (ciò che si fa in un certo nodo dell'albero) in funzione del percorso fatto prima e della mappa dei possibili percorsi fino a scadenza. Come si vedrà, in un mercato con *random walk* l'avversario (il mercato) tiene un comportamento non esattamente prevedibile ma equo ed esistono regole efficaci per chiudere in pareggio ogni partita.

## 3.2 Primo livello: pr inciante

### 3.2.1 Gli alberi binari: geometria e regole di navigazione

I processi sinora considerati prevedono che da uno stato al tempo corrente se ne possano raggiungere due, e solo due, nel tempo immediatamente successivo. Partendo da uno stato iniziale, abbiamo quindi una biforcazione, o meglio una serie di biforcazioni, dei percorsi che collegano gli eventi possibili. La struttura generale degli *alberi binari* o *binomiali* consente che il numero degli stati raddoppi ad ogni passo, come nella figura sottostante.

Figura 3.2.1 - Albero binario con nodi numerati a tre periodi.



Ad ogni stato corrisponde un *nodo* dell'albero.

In quest'albero a struttura libera abbiamo numerato i nodi da 0, stato iniziale, in avanti. Ad ogni *step* la numerazione parte dal nodo inferiore, nel quale il contatore è pari al doppio del valore al nodo inferiore precedente, più uno. Applicando questa mappa al processo dei prezzi, denominiamo rialzo ( $u$ ) l'evento che porta da un nodo  $j$  al nodo  $2j+2$  e ribasso ( $d$ ) l'evento alternativo che porta da  $j$  a  $2j+1$ . Agli eventi  $u$  e  $d$  sono associate probabilità  $p$  e  $1-p$ .

Su un orizzonte comprendente più *step*, il processo è definito dall'insieme dei percorsi possibili, che sono in numero pari ai nodi terminali dell'albero. La tabella seguente elenca gli otto percorsi di un albero a tre periodi e le rispettive sequenze di eventi  $u$  e  $d$ .

L'entità dei movimenti di prezzo e le relative probabilità sono, nel caso "scolastico" che qui esaminiamo, costanti in tutti i nodi. Nel caso più generale si possono avere *shock* di prezzo e probabilità di rialzo/ribasso variabili da nodo a nodo, ed è quindi possibile definire probabilità di nodo condizionate alla sequenza di eventi che portano a raggiungerlo.

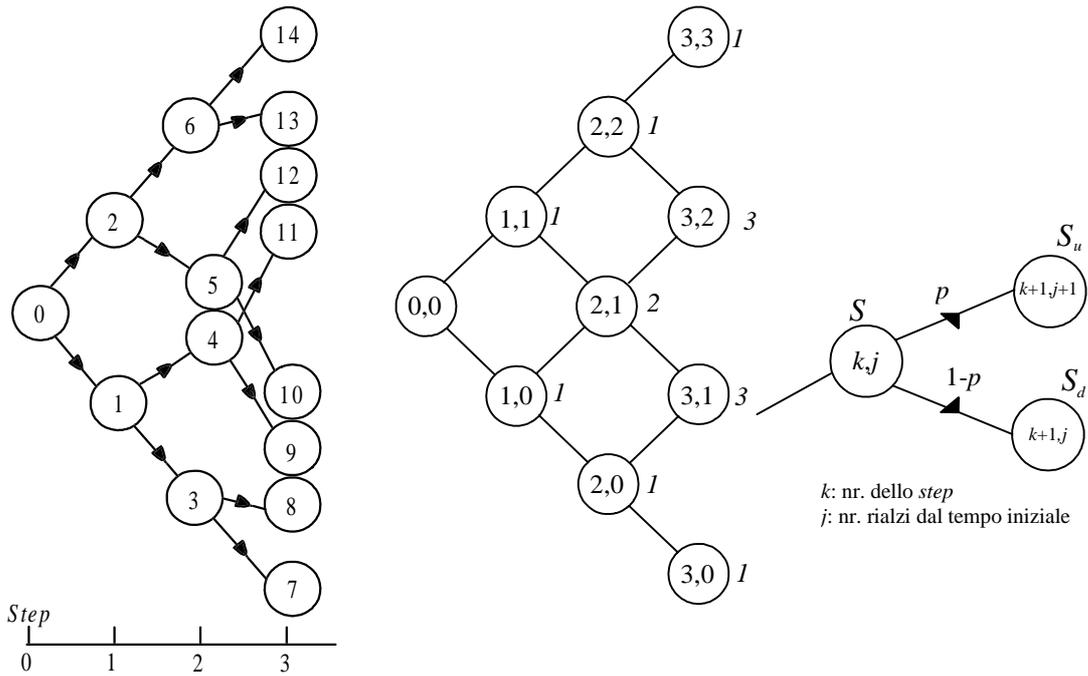
**Tabella 3.2.1 - Percorsi di un albero a tre periodi non ricombinante.**

Nr. percorso	Sequenze nodi	Sequenze eventi	Probabilità
1	0-2-6-14	<i>u-u-u</i>	$p_0 p_2 p_6$
2	0-2-6-13	<i>u-u-d</i>	$p_0 p_2 (1-p_6)$
3	0-2-5-12	<i>u-d-u</i>	$p_0 (1-p_2) p_5$
4	0-2-5-11	<i>u-d-d</i>	$p_0 (1-p_2) (1-p_5)$
5	0-1-4-10	<i>d-u-u</i>	$(1-p_0) p_1 p_4$
6	0-1-4-9	<i>d-u-d</i>	$(1-p_0) p_1 (1-p_4)$
7	0-1-3-8	<i>d-d-u</i>	$(1-p_0) (1-p_1) p_3$
8	0-1-3-7	<i>d-d-d</i>	$(1-p_0) (1-p_1) (1-p_3)$

La probabilità di un percorso, coincidente con la probabilità di raggiungere il corrispondente nodo finale, è calcolata come prodotto delle probabilità condizionate degli eventi che compongono il percorso. Introduciamo ora le limitazioni alla struttura dell'albero e alle funzioni di probabilità che caratterizzano i processi IID prima considerati, ovvero fattori di variazione e probabilità costanti. La struttura si compatta in virtù del ricombinarsi dei nodi raggiunti da una sequenza di due movimenti di segno opposto ( $S_j \times u \times d = S_j \times d \times u$ ), assicurata dalla costanza nel tempo/spazio degli stati dei fattori di variazione  $u$  e  $d$ .

I nodi, quindi, intesi come insieme dei prezzi possibili non raddoppiano ad ogni passo, ma aumentano di un'unità. Anche il calcolo delle probabilità di percorso o di stato finale è semplice per l'indipendenza tra variazioni successive. La distribuzione di probabilità è isomorfa in tutti i rami dell'albero. Ne ricaviamo una mappa più compatta, su cui ridefiniamo gli indicatori di posizione dei nodi da numero progressivo a coppia di coordinate (nr. *step*, nr. di rialzi dal tempo iniziale). I rami si riducono da 7 a 6.

Figura 3.2.2 - Albero binario ricombinante a tre periodi.



Nella figura al centro è indicato a destra di ogni nodo il numero di percorsi che conducono ad esso.

La tabella dei percorsi è ridefinita accorpando insieme di percorsi equivalenti, che conducono ad uno stesso prezzo finale e hanno uguale probabilità.

Tabella 3.2.2 - Percorsi di un albero a tre periodi ricombinante.

Nr percorso	Sequenza nodi	Sequenze eventi	Nodo finale	Prezzo finale/prezzo iniziale	Probabilità
1	0-2-6-14	<i>u-u-u</i>	3,3	$u^3$	$p^3$
2	0-2-6-13	<i>u-u-d</i>	3,2	$u^2d$	$3p^2(1-p)$
3	0-2-5-12	<i>u-d-u</i>			
4	0-2-5-10	<i>u-d-d</i>	3,1	$ud^2$	$3p(1-p)^2$
5	0-1-4-11	<i>d-u-u</i>			
6	0-1-4-9	<i>d-u-d</i>	3,0	$d^3$	$(1-p)^3$
7	0-1-3-8	<i>d-d-u</i>			
8	0-1-3-7	<i>d-d-d</i>			
<b>TOTALE:</b>					<b>100%</b>

Il numero di percorsi per un dato prezzo finale è ricavabile in modo ricorsivo dal triangolo di Pascal<sup>1</sup> come somma dei percorsi relativi ai nodi collegati uno *step* indietro, (che sono due, tranne che per i valori estremi, che ne hanno uno solo) o direttamente come coefficiente binomiale funzione del numero di *step* e di rialzi.

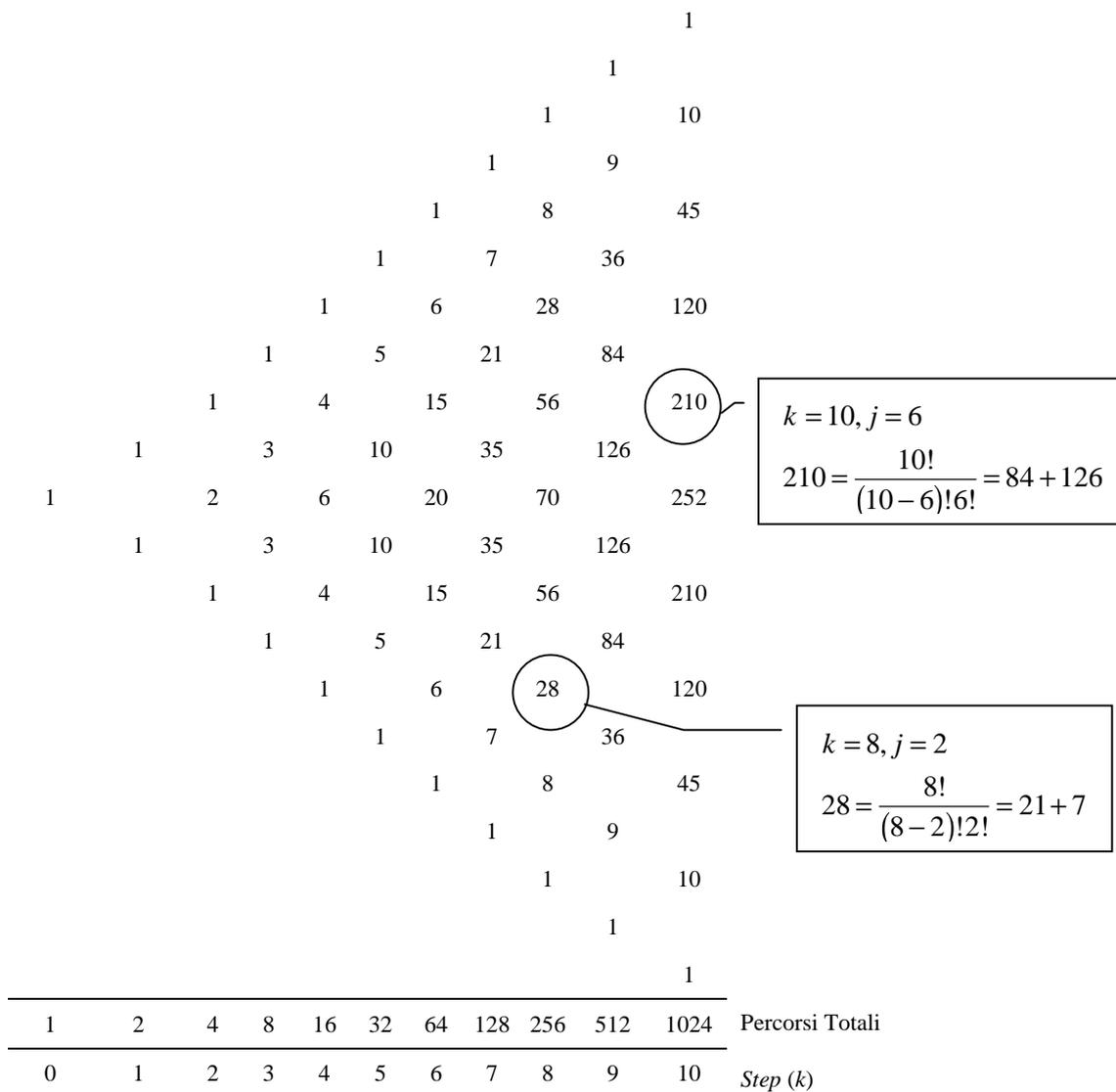
<sup>1</sup> Il triangolo di Pascal, sviluppato nella corrispondenza di Blaise Pascal con Pierre de Fermat, consente di determinare intuitivamente il numero di vincite totalizzate da un giocatore in un gioco di fortuna analogo al lancio di una moneta e, da questo, le probabilità di superare una certa soglia di numero di vincite dopo un certo numero di ulteriori giocate.

$$\binom{k}{j} = \frac{k!}{(k-j)!j!}$$

La probabilità di ottenere dopo  $k$  step un dato prezzo è facilmente calcolabile in funzione del numero di percorsi e del numero di rialzi corrispondenti:

$$p(k, j) = \binom{k}{j} p^j (1-p)^{k-j}$$

**Figura 3.2.3 - Il triangolo di Pascal fino a 10 step.**



Il triangolo di Pascal descrive la distribuzione di una variabile aleatoria di *tipo binomiale* data dal numero  $j$  di vincite realizzate da un giocatore con una serie di lanci di una moneta.

La distribuzione binomiale costruita su un albero ricombinante ha proprietà calcolabili con formule compatte. Ad esempio la distribuzione del prezzo avrà dopo  $n$  step valore atteso e varianza così espresse:

$$E(S_n) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} S_0 u^j d^{n-j}$$

$$\sigma^2(S_n) = \left[ \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} (S_0 u^j d^{n-j})^2 \right] - E(S_n)^2$$

Anche per i ritorni cumulati possiamo definire formule analoghe sostituendo a  $\ln(u)$  e  $\ln(d)$  le corrispondenti funzioni dei parametri di costruzione dell'albero:

$$E[\xi(0, t_n)] = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \left[ j(E(\xi)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}) + (n-j)(E(\xi)\Delta t - \sigma\sqrt{\Delta t}) \right]$$

$$\sigma^2[\xi(0, t_n)] = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \left[ j(E(\xi)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}) + (n-j)(E(\xi)\Delta t - \sigma\sqrt{\Delta t}) \right]^2 - E[\xi(0, t_n)]^2$$

Non è molto pratico applicarle, visto che per la stessa variabile aleatoria (che, a differenza dei prezzi, è scomponibile additivamente) disponiamo di formule generali (quelle viste in precedenza nel capitolo 2) alle quali sono esattamente riconducibili le espressioni iterative qui riportate, con le opportune semplificazioni.<sup>2</sup> Per guadagnare una completa familiarità con la distribuzione binomiale e per avere ulteriori conferme numeriche e intuitive delle regole enunciate nel paragrafo precedente, sviluppiamo nella figura 3.2.4 le distribuzioni binomiali, vera e neutrale al rischio, su un dato orizzonte  $t_n$ , seguendone il comportamento all'aumentare del numero di *step*. Notiamo la simmetria della vera distribuzione del logaritmo dei prezzi (di forma uguale a quella dei ritorni) che contrasta con l'iniziale asimmetria della *risk neutral*. Al crescere del numero di *step* le differenze di forma si attenuano in quanto entrambe convergono verso una normale. La distribuzione *risk neutral* è come spostata a sinistra rispetto a quella vera per l'effetto cambio di misura essendo la probabilità di rialzo  $q$  inferiore a 0,5 in presenza di un tasso *repo*  $r$  più basso del vero ritorno sul prezzo atteso. La distribuzione dei prezzi si presenta marcatamente asimmetrica, con una coda destra di maggior estensione e spessore. Le probabilità di ogni prezzo finale sono le medesime dei corrispondenti ritorni, ma risultano progressivamente distanziate al crescere del prezzo, banale effetto del cambiamento della scala dell'asse orizzontale da logaritmica (valori finali equidistanti) a normale.

---

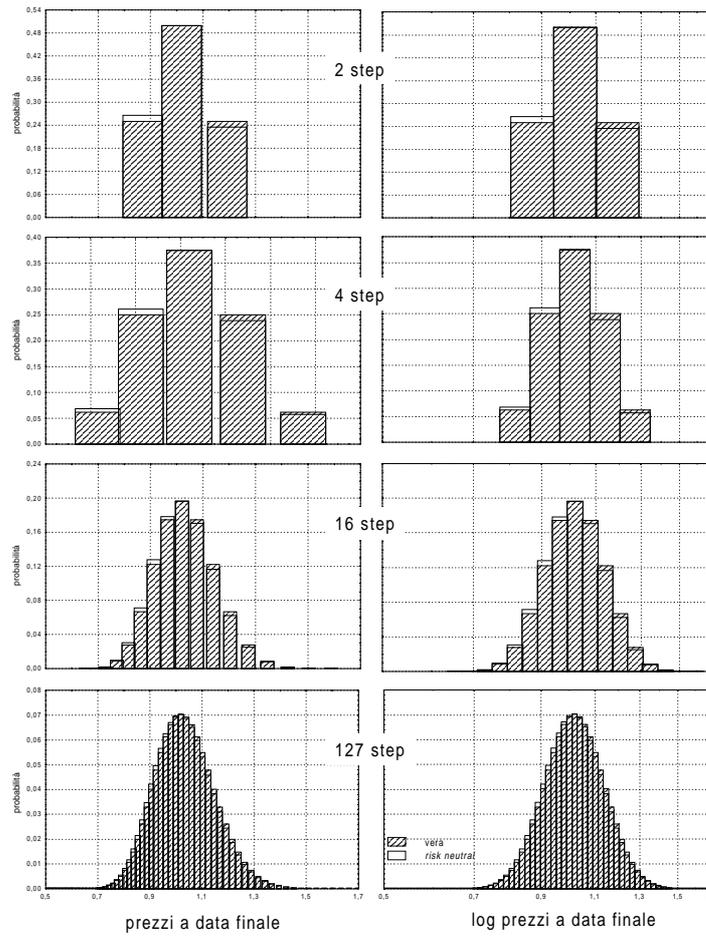
<sup>2</sup> Possiamo infatti riesporre così, ricordando che la somma delle probabilità finali è pari a 1:

$$E[\xi(0, t_n)] = nE(\xi)\Delta t + \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \left[ j\sigma\sqrt{\Delta t} - (n-j)\sigma\sqrt{\Delta t} \right] =$$

$$= E(\xi)t_n + \sigma\sqrt{\Delta t} \left\{ \left[ 2 \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} j \right] - n \right\} = E(\xi)t_n$$

L'espressione in sommatoria è il valore atteso di una variabile binomiale  $j$ , pari a  $np$ , pertanto per  $p=0,5$  il secondo addendo è pari a zero. Analogamente si semplifica la formula della varianza.

**Figura 3.2.4 - Forma delle distribuzioni binomiali all'aumentare degli step.**



Gli istogrammi della vera distribuzione (tratteggiati) sono sovrapposti a quelli *risk neutral* (bianchi). Per i parametri di costruzione degli alberi si veda la tabella seguente.

Nella tabella 3.2.3, basata sulle medesime ipotesi della figura 3.2.4, si nota inoltre lo scarto tra ritorno atteso e ritorno sul prezzo atteso e la convergenza di quest'ultimo verso il valore approssimato dall'espressione a tempo continuo.

**Tabella 3.2.3 - Proprietà delle distribuzioni binomiali all'aumentare degli step.**

a) Parametri di costruzione degli alberi (base annua)

Drift ( $\mu$ )	5,0%	$E(\xi) = \mu - \frac{\sigma^2}{2}$
Tasso repo ( $r$ )	4,0%	
Volatilità ritorni ( $\sigma$ )	15,7%	
Tempo a scadenza ( $t_n$ )	0,5 anni	
Prezzo iniziale ( $S_0$ )	1,000000	
Prezzo atteso vero ( $E(S)_n$ )	1,025315	
Prezzo atteso risk neutral ( $F(n)_0$ )	1,020201	

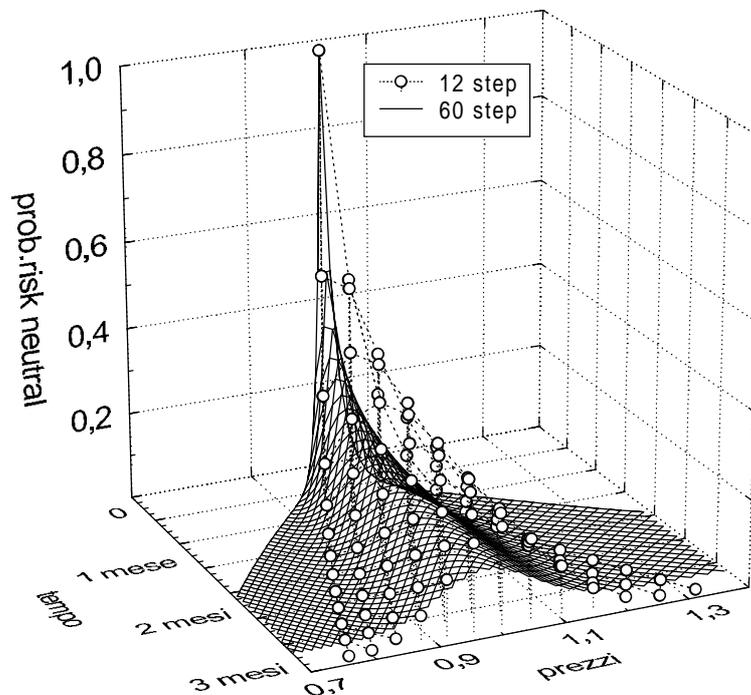
b) Proprietà delle distribuzioni binomiali risultanti

Numero di step	Distribuzione vera				Distribuzione risk neutral			
	$E(S)_n$	$S[E(\xi)]^a$	$\sigma$ sem.	$\sigma$ annua	$E(S)_n$	$S[E(\xi)]^a$	$\sigma$ sem.	$\sigma$ annua
2	1,025309	1,019016	11,1016%	15,700%	1,020201	1,013936	11,0960%	15,692%
4	1,025312	1,019016	11,1016%	15,700%	1,020201	1,013935	11,0988%	15,696%
16	1,025314	1,019016	11,1016%	15,700%	1,020201	1,013934	11,1009%	15,699%
127	1,025315	1,019016	11,1016%	15,700%	1,020201	1,013934	11,1015%	15,700%

(a) Prezzo corrispondente al ritorno atteso alla scadenza

Nelle vere distribuzioni binomiali la volatilità riproduce perfettamente quella assunta come parametro di costruzione per qualsiasi numero di step. Si ha un errore di approssimazione del prezzo atteso. Le distribuzioni binomiali risk neutral riproducono con precisione il prezzo atteso a priori, e presentano errori di approssimazione della volatilità e del prezzo da ritorno atteso. L'errore si riduce all'aumentare del numero di step.

Nella figura 3.2.5 si visualizza la dinamica della distribuzione risk neutral costruita sull'albero binomiale al passare del tempo. Si confrontano due processi equivalenti quanto a proprietà dei ritorni e periodo di osservazione, differenziati per durata dello step.

**Figura 3.2.5 - Albero binomiale e probabilità risk neutral al variare del numero di step.**

Ipotesi di drift del 5% e volatilità del 15,7% (base annua). Processo suddiviso in 12 step settimanali o 60 step

giornalieri. Il *range* dei valori dell'albero si allarga all'aumentare degli *step* e le probabilità si riducono.

### 3.2.2 Replica e arbitraggio su $n$ -periodi

Con quanto detto al punto precedente, abbiamo acquisito la strumentazione per applicare l'approccio probabilistico su più periodi. Passiamo ora ad estendere i principi di replica ed arbitraggio. Nel caso del singolo ramo abbiamo costruito una copertura senza rischio di un derivato valida localmente, fino cioè al nodo successivo, che produceva un *payoff* certo. Si tratta ora di dimostrare che vi è la possibilità di identificare una strategia che, passo dopo passo, è in grado di riprodurre il valore a scadenza del derivato qualunque sia il percorso seguito dal sottostante. Non solo, occorre riverificare la corrispondenza biunivoca tra costo di replica e valore atteso, una conclusione che non ci azzardiamo a dare per scontata.

#### Fate $n$ passi indietro (con tanti auguri): l'induzione del processo del valore teorico

Supponiamo di aver definito il processo del prezzo *spot* dal valore iniziale fino alla scadenza  $t_n$  del derivato. Teniamo ferma questa mappa, ovvero ipotizziamo costanti *drift* e volatilità dei ritorni tra  $t_0$  e  $t_n$ , anche dopo che il prezzo avrà cominciato a muoversi dallo stato iniziale.

Portiamoci (idealmente) alla scadenza. Conoscendo la formula contrattuale non avremo problemi a calcolare il *payoff* del derivato per ciascun nodo finale. Siamo certi che il derivato raggiungerà uno tra questi valori, anche se non sappiamo prevedere quale. Facciamo (sempre idealmente) un passo indietro. Per ogni nodo al passo  $n-1$  possiamo calcolare, come per un singolo ramo isolato, una replica senza rischio in base ai valori del derivato  $V$  e del sottostante nei nodi discendenti, che è nota con certezza in  $n-1$ .

Con la notazione prima introdotta, calcoliamo:

$$\Delta_{n-1,j} = \frac{V_{n,j+1} - V_{n,j}}{S_{n,j+1} - S_{n,j}}$$

per un costo di riproduzione così determinato:

$$V_{n-1,j} = \left[ V_{n,j+1} - \Delta_{n-1,j} (S_{n,j+1} - F_{n-1,j}) \right] e^{-r\Delta t}$$

dove  $F_{n-1,j}$  è il *forward* con scadenza  $n$  valutato in  $(n-1,j)$ , pari a  $S_{n-1,j} e^{r\Delta t}$ , e  $r$  è il tasso di riporto vigente nello stesso nodo.

Scorrendo tutti i nodi in  $n-1$  ricostruiamo l'insieme dei valori di equilibrio del derivato un passo prima della scadenza. Se confermiamo la nostra piena fiducia nella tenuta dell'albero, giudicheremo i valori così calcolati come valori vincolanti per un mercato in equilibrio, facilmente arbitrabili se il prezzo quotato del *claim* dovesse discostarsene. Appoggiandoci sul gradino così costruito facciamo un altro passo indietro, allo *step*  $n-2$ . Ripetiamo l'operazione: scorriamo i nodi e per ciascuno calcoliamo la strategia di replica e il relativo costo sulla base dei valori nei due nodi discendenti e del tasso di riporto. Riempiamo così un'altra fila di valori teorici "solidi", in quanto si appoggiano ancora, via meccanismi di arbitraggio, ai *payoff* finali, sia pur tramite i valori analoghi calcolati in  $n-1$ . A questo punto la procedura è banale *routine*. Facciamo un altro passo indietro e completiamo la colonna per  $V_{n-3}$ , e così indietro uno *step* alla volta, fino a definire la coppia  $V_{2,1}$   $V_{2,0}$ . Infine basta un ultimo passo sul primo ramo per ricavare, al termine del procedimento di induzione retrograda, il valore di equilibrio iniziale del *claim*.

Tutto questo avviene al tempo 0 ed è preliminare all'avvio della strategia di replica. Metaforicamente, abbiamo tracciato la mappa dei binari sui quali (ne siamo certi) viaggeranno la motrice (il prezzo sottostante) e il suo traino (il valore del derivato).

*Il valore del derivato non nasce come processo: in origine è definito come claim, quindi soltanto nei nodi a scadenza. Col procedimento induttivo abbiamo però ricostruito all'indietro i valori precedenti, che formano qualcosa di equivalente ad un processo.*

Come prodotto collaterale ho una terza mappa, quella dei valori del *Delta* da applicare in ogni nodo.<sup>3</sup>

Siamo pronti ad affrontare il viaggio, ovvero a condurre dal tempo  $t_0$  fino a scadenza una replica perfetta del derivato. Al tempo  $t_0$  impostiamo una strategia con  $\Delta_0$  del sottostante. Dopo un periodo si rileva il prezzo raggiunto dal sottostante e il nuovo livello del *Delta*, in base al quale viene rivista la copertura (con nuovi acquisti se *Delta* aumenta, con vendite se si riduce). Si può così affrontare il secondo *step*.

Reiterando la manovra descritta ci porteremo ad un periodo dalla scadenza, dopo aver giocato  $n-1$  mani di questa partita, in ciascuna delle quali:

- calcoliamo e ristrutturiamo il *Delta*;
- facciamo scorrere il tempo di un periodo e osserviamo il nuovo prezzo raggiunto.

Ad un periodo dalla scadenza ci ritroviamo nella situazione identica al caso uniperiodale e portiamo il *Delta* al livello che garantisce un valore della strategia pari al *payoff* in entrambi i nodi discendenti.

Al termine di questo doppio percorso, prima a ritroso (disegno della mappa) e poi in avanti (simulazione dinamica della strategia), confidiamo che il lettore, pur non completamente persuaso, sia giunto a ritenere plausibile la precisa ricostruzione del *payoff* finale. Non abbiamo però finito di mettere alla prova la sua fiducia (e la capacità di stupirsi). Vogliamo infatti convincerlo che la strategia così condotta presenta altre preziose prerogative:

- è *autofinanziante*, cioè ha un costo iniziale pari al valore del derivato e non comporta alcuna immissione o prelievo netto di liquidità, nei nodi seguenti, anche se i prezzi e i *Delta* variano;
- ha un valore di equilibrio pari al *payoff atteso scontato* dalla scadenza all'indietro verso qualsiasi nodo dell'albero; è cioè valutabile col metodo probabilistico data un'adeguata misura  $\mathbb{Q}$  *risk-neutral*.

Potremmo cercare di dimostrare subito queste due affermazioni, ma prima preferiamo costruire un appoggio per l'intuito con un esempio elementare. La generalizzazione sarà condotta dopo, previa estensione della terminologia.

### Un esempio elementare

Sia dato il processo del prezzo di un contratto *forward* con scadenza fra 3 periodi. Il prezzo corrente è 100. Sia inoltre data un'opzione *put* sullo stesso sottostante con *strike ATM forward*, ovvero  $K=100$ . La replica avviene mediante una quantità *Delta* di contratti *forward* con scadenza  $t_3$ . Il premio del *put* è liquidato alla scadenza, in modo che il flusso relativo coincida temporalmente con il *payoff* dello stesso *put* e delle operazioni *forward* di copertura.

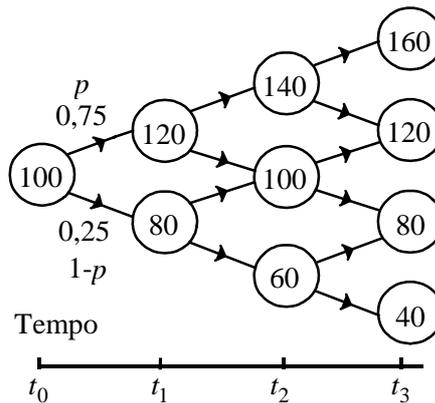
*Un contratto con premio regolato a scadenza è riproducibile con uno regolato a pronti in cui si finanzia la spesa con un debito (holder) o si investe il ricavato con un credito (writer).*

Scegliamo di basarci sul processo *forward* per eliminare dal modello i tassi di interesse. Il processo traccia una mappa di valori a cifra tonda<sup>4</sup> con variazioni costanti in valore assoluto. Qui non ci interessa analizzare le volatilità della distribuzione, ma valutare il derivato; con l'occasione noteremo che le tecniche di replica e di valutazione probabilistica sono applicabili a qualsiasi processo discreto non "degenerato". Ecco la mappa del processo costruito come albero ricombinante:

<sup>3</sup> Il valore del debito  $B$  è un dato accessorio che può essere eliminato, come faremo nel prossimo esempio, basando tutti i processi sui prezzi *forward*.

<sup>4</sup> L'autore ha ripreso il processo impiegato per un analogo esempio in Baxter e Rennie (1996: 23-27)

Figura 3.2.6 - Processo del prezzo *forward*.



I prezzi sono ottenuti aggiungendo (in caso di rialzo) o sottraendo (in caso di ribasso) dal prezzo precedente una variazione costante pari a 20 (si configura un processo binomiale additivo, simmetrico rispetto ai prezzi, diverso dal processo moltiplicativo, simmetrico rispetto ai ritorni, utilizzato prima).

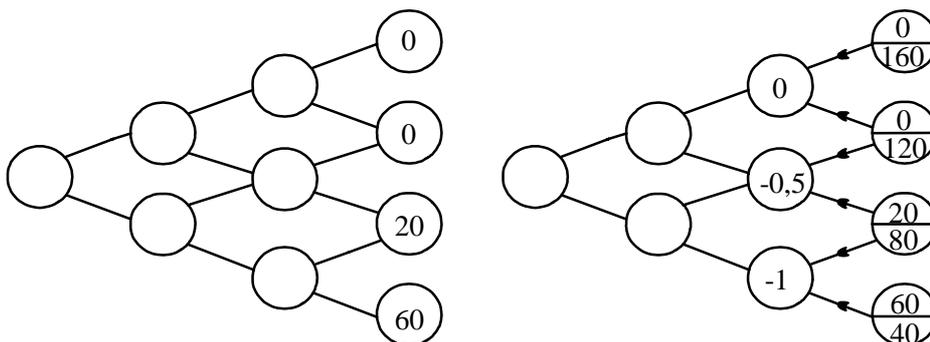
Siano date le vere probabilità:  $p=0,75$  e  $1-p=0,25$  (a differenza del caso noto, che usava  $p=1-p=0,5$ ).

L'albero è costruito in modo da avere  $F_{ora}$  sempre pari alla media semplice dei prezzi nei nodi discendenti. Su un albero del genere è facile determinare  $q$  e  $1-q$ , probabilità *risk neutral*, che risultano uguali in ogni ramo a 0,5. Infatti:

$$q = \frac{F_{ora} - F_d}{F_u - F_d} = \frac{20}{40} = 0,5$$

Passiamo a valorizzare il *claim* alla scadenza determinando il *payoff* finale e da questo il *Delta* uno *step* prima della scadenza (per facilitare la determinazione del *Delta* riportiamo nei nodi finali i valori del *put* e del sottostante).

Figura 3.2.7 - Determinazione del *payoff* a scadenza e del *Delta* in  $t_2$ .



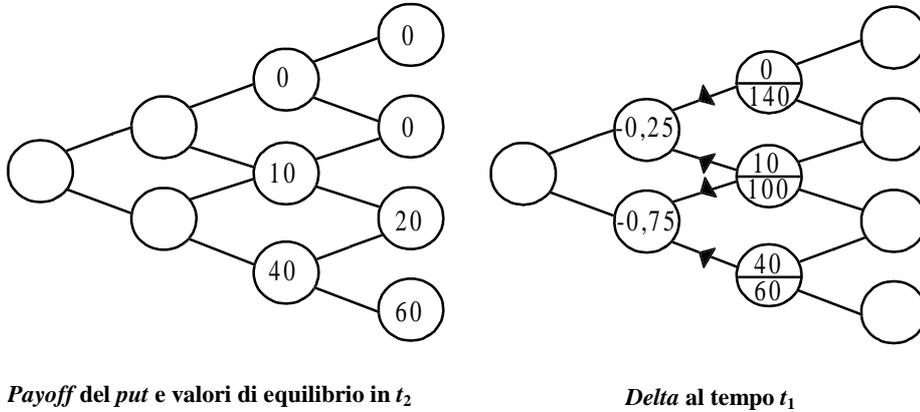
*Payoff* al tempo  $t_3$

*Delta* al tempo  $t_2$ . Nei nodi a scadenza sono riportati *payoff* (sopra) e prezzo (sotto).

Nel nodo (2,2), dal quale si "vede" un *payoff* finale sicuramente nullo, otteniamo un *Delta* nullo. I *Delta* sono negativi (la replica richiede una vendita di *forward* con scadenza  $t_3$ ) negli altri nodi. Nel nodo (2,0) il *Delta* è unitario perché da lì si "vede" un esercizio certo in entrambi i nodi discendenti: il *put* si riduce ad una vendita *forward*, da replicare con un *forward* di uguale segno e importo.

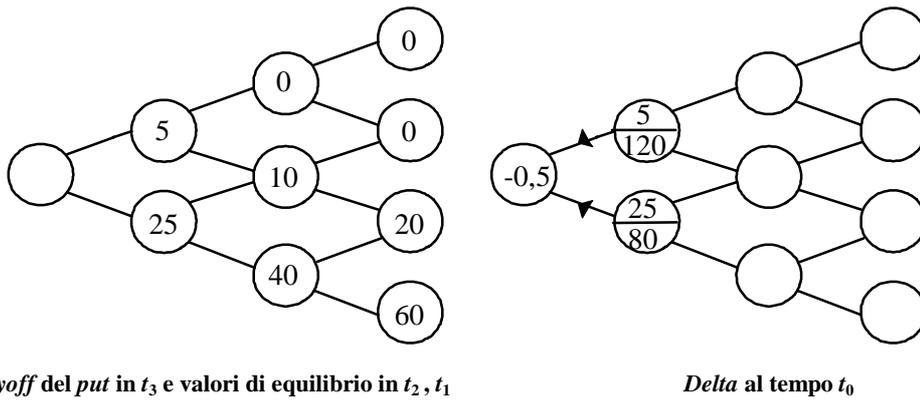
Con la formula probabilistica  $V_k = qV_{k+1,u} + (1-q)V_{k+1,d}$  determiniamo i valori del derivato in  $t_2$ . Da questi ricaviamo i *Delta* in  $t_1$ .

**Figura 3.2.8 - Determinazione del *Delta* in  $t_1$ .**



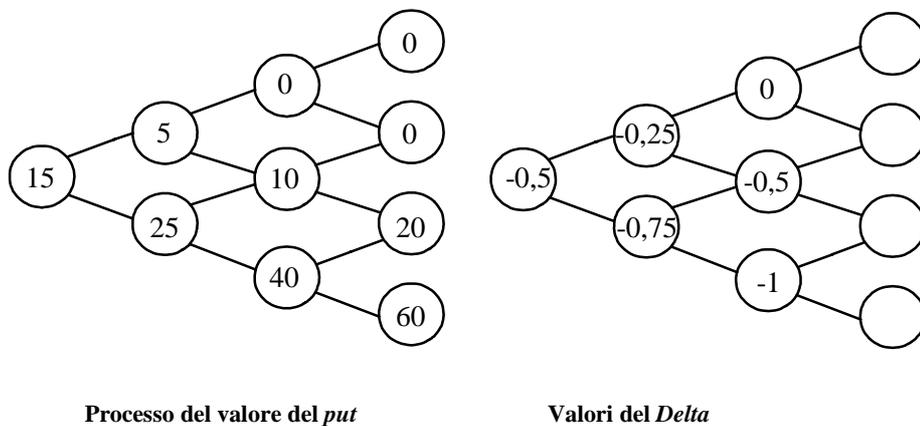
Facciamo un passo indietro e determiniamo i valori del *put* in  $t_1$ .

**Figura 3.2.9 - Determinazione del *Delta* in  $t_0$ .**



Compiamo l'ultimo passo e determiniamo il valore del *put* in  $t_0$ , pari a  $15 = 0,5 \times 5 + 0,5 \times 25$ . Abbiamo completato gli alberi del valore del *claim* e del *Delta*, che riportiamo:

**Figura 3.2.10 - Processi completi del valore del *put* e del *Delta*.**



A questo punto abbiamo tutto l'occorrente per attuare dinamicamente la strategia di replica. Vediamo come si comporta in un paio di percorsi tra gli otto possibili:

Tempo 0	Il <i>Delta</i> è -0,5. Vendiamo 0,5 <i>forward</i> a 100.
Tempo 1	Il prezzo sale a 120. Il <i>Delta</i> si alleggerisce, passando a -0,25. Ci adeguiamo, partendo dal <i>Delta</i> iniziale pari a -0,5, comprando 0,25 <i>forward</i> a 120.
Tempo 2	Il prezzo scende a 100. Il <i>Delta</i> torna a -0,5. Lo riadeguamo vendendo 0,25 a 100.
Tempo 3	Il prezzo scende a 80. Liquidiamo la posizione <i>Delta</i> acquistando 0,5 a 80. Viene regolata la nostra posizione <i>forward</i> pari alla differenza tra i controvalori di vendita e acquisto. Otteniamo un risultato positivo.

$$\underbrace{(0,5 \times 100 + 0,25 \times 100)}_{\text{controvalore vendite}} - \underbrace{(0,25 \times 120 + 0,5 \times 80)}_{\text{controvalore acquisti}} = 75 - 70 = 5$$

Ora confrontiamo il risultato con quello che avremmo ottenuto acquistando il *put* al valore iniziale di equilibrio di 15. Per un prezzo finale di 80 avremmo un *payoff* di 20 e un risultato di  $20 - 15 = 5$ , coincidente con quello sulla posizione *Delta forward*. Se avessimo venduto il *put* a 15, alla scadenza (ricordiamo che il premio è regolato a scadenza) avremmo incassato 15 e sostenuto un'uscita netta per *payoff* all'esercizio (ritiro a 100 di un titolo rivendibile a 80) di 20, per una perdita pari a 5. La strategia di replica è una copertura efficace di un'opzione venduta. Se il premio applicato è pari al valore di equilibrio, la vendita coperta chiude in pareggio. Se è superiore si può realizzare un profitto certo.

Riepiloghiamo l'andamento della strategia nella tabella seguente.

Il valore del  $\Delta_k$  è riferito al relativo periodo di detenzione e pertanto il  $\Delta$  stabilito inizialmente è attribuito a  $t_1$ , e così via. Il risultato della strategia nei nodi intermedi si ottiene ipotizzando di effettuare in alternativa al riposizionamento un'operazione di smobilizzo del  $\Delta$  per pari quantità e di segno opposto. Detto risultato da smobilizzo si calcola così:

$$\text{Valore chiusura}_k = \sum_{j=0}^{k-1} \text{Controvalore acquisti/vendite}_j + \Delta_k F_k$$

Ovviamente nell'ultimo periodo il valore da chiusura coincide con il risultato finale.

**Tabella 3.2.4 - Posizione di replica: andamento e risultato (caso u-d-d).**

Tempo $k$	Movimento precedente	Prezzo <i>forward</i> $F_k$	Valore <i>put</i> $V_k$	Risultato <i>put</i> $V_k - V_0$	Posizione <i>Delta</i> $\Delta_k$	Acquisti(+) Vendite(-)	CTV Acquisti(-) Vendite(+)	Risultato strategia
0		100	15	0	-	-0,5	50	0
1	<i>u</i>	120	5	-10	-0,5	+0,25	-30	50-60=-10
2	<i>d</i>	100	10	-5	-0,25	-0,25	25	20-25=-5
3	<i>d</i>	80	20	+5	-0,5	+0,5	-40	45-40=+5

Si osserva che il risultato della strategia coincide con il risultato di un acquisto scoperto del *put* e ciò non solo alla fine, ma anche negli *step* precedenti. La strategia ha quindi un valore (coincidente col risultato da chiusura) che differisce da quello del *put* in tutti i nodi toccati per una differenza costante, pari al premio iniziale.

Giusto per fugare il dubbio che i conti tornino per mera coincidenza, seguiamo un percorso alternativo.

Tempo 0	Il <i>Delta</i> è -0,5. Vendiamo 0,5 a 100.
Tempo 1	Il prezzo scende a 80. Vendiamo -0,25 a 80 per adeguare <i>Delta</i> a -0,75.
Tempo 2	Il prezzo sale a 100. Acquistiamo 0,25 a 100 per portare <i>Delta</i> a -0,5.
Tempo 3	Il prezzo sale a 120. Azzeriamo il <i>Delta</i> , chiudendo la posizione, acquistando 0,5 a 120.

Vediamo i risultati.

**Tabella 3.2.5 - Posizione di replica: andamento e risultato (caso *d-u-u*).**

Tempo $k$	Movimento precedente	Prezzo forward $F_k$	Valore put $V_k$	Risultato put $V_k - V_0$	Posizione $\Delta_k$	Acquisti(+) Vendite(-)	CTV Acquisti(-) Vendite(+)	Risultato strategia
0		100	15	0	-	-0,5	50	0
1	<i>D</i>	80	25	+10	-0,5	-0,25	20	50-40=+10
2	<i>U</i>	100	10	-5	-0,75	+0,25	-25	70-75=-5
3	<i>U</i>	120	0	-15	-0,5	+0,5	-60	45-60=-15

Di nuovo il risultato della strategia coincide in ogni nodo con quello di una posizione lunga scoperta in *put*.

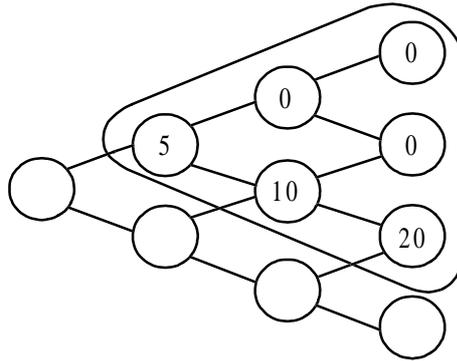
*Se il premio fosse liquidato a pronti, per replicare il put bisognerebbe effettuare al tempo 0 un investimento in un credito con scadenza  $t_3$  di importo pari al valore iniziale dell'opzione. Quest'ultimo sarebbe pari al valore con premio liquidato in  $t_3$ , attualizzato in  $t_0$  a un idoneo tasso.*

Se provassimo la strategia sui 6 percorsi restanti il risultato non cambierebbe. Pertanto possiamo euristicamente compiacerci del fatto che la ricetta per replicare il derivato funziona. Seguendone i dettami non siamo in grado di prevedere tutte le nostre mosse al tempo 0 (il *Delta* che deteniamo segue a sua volta un processo aleatorio). Siamo però attrezzati per affrontare in posizione coperta ogni nuovo salto del prezzo: il *Delta* appropriato è infatti determinabile giusto uno *step* prima dello *shock* che è incaricato di assorbire; in altre parole, attenendoci a una sequenza di indicazioni circa i portafogli di replica validi localmente noi attuiamo una strategia di ricostruzione valida globalmente, cioè per l'intera durata contrattuale del derivato.

Rimane ora da provare che la tecnica gode delle prerogative annunciate. Riformuliamo come quesiti le affermazioni fatte in precedenza:

- la strategia combinata con la vendita del derivato è *autofinanziante*? Risposta affermativa. Con premi liquidati a termine effettuo una serie di operazioni *forward* al prezzo corrente, quindi con valore netto alla stipula nullo (nessun esborso e nessun incasso prima della scadenza) né vi sono entrate e uscite a pronti sul derivato; con premio liquidato a pronti posso investire il ricavato con scadenza  $t_n$  e riportarmi in un caso equivalente a quello prima considerato;
- il valore del derivato è sempre pari al valore atteso calcolato sulla distribuzione *risk neutral* del *payoff* finale? Sì, certamente. Infatti il procedimento ricorsivo, ramo per ramo, applicato nel riempire all'indietro l'albero di  $V_k$ , porta a determinare in ogni nodo per  $t_k < t_n$  un valore del derivato pari al valore atteso *risk neutral*.

Per dar conto dell'ultima affermazione sviluppiamo la determinazione di  $V_{1,1}$  in base alla distribuzione di  $V_{3,j}|V_{1,1}$ , che corrisponde alla sezione dell'albero incorniciata nella figura 3.2.11.

Figura 3.2.11 - Determinazione del valore atteso del *put* nel nodo 1,1.

Applicando ricorsivamente il metodo probabilistico otteniamo un'espressione per  $V_{1,1}$  che coincide con il relativo valore atteso a scadenza dal nodo (1,1):

$$\begin{aligned} V_{1,1} &= qV_{2,2} + (1-q)V_{2,1} = q[qV_{3,3} + (1-q)V_{3,2}] + (1-q)[qV_{3,2} + (1-q)V_{3,1}] = \\ &= q^2V_{3,3} + 2q(1-q)V_{3,2} + (1-q)^2V_{3,1} = \mathbb{E}_Q(V_3|V_{1,1}) \end{aligned}$$

Sostituendo con i valori dell'esempio otteniamo:

$$0,5 \times 0 + 0,5 \times 10 = 0,25 \times 0 + 2 \times 0,25 \times 0 + 0,25 \times 20 = 5$$

Analogamente ricaviamo il valore iniziale:

$$\begin{aligned} V_0 &= q\{q[qV_{3,3} + (1-q)V_{3,2}] + (1-q)[qV_{3,2} + (1-q)V_{3,1}]\} + \\ &+ (1-q)\{q[qV_{3,2} + (1-q)V_{3,1}] + (1-q)[qV_{3,1} + (1-q)V_{3,0}]\} = \\ &= q^3V_{3,3} + 3q^2(1-q)V_{3,2} + 3q(1-q)^2V_{3,1} + (1-q)^3V_{3,0} = \mathbb{E}_Q(V_3|V_0) \end{aligned}$$

In cifre:

$$\mathbb{E}_Q(V_3|V_0) = 15 = \frac{1}{8}0 + \frac{3}{8}0 + \frac{3}{8}20 + \frac{1}{8}60$$

Il valore atteso, data la misura  $Q$ , è nettamente diverso da quello ottenibile sotto la vera misura  $P$  con probabilità  $p=0,75$  e  $(1-p)=0,25$ . Con la misura  $P$  otteniamo infatti:

$$\mathbb{E}_P(V_n) = \frac{27}{64}0 + \frac{27}{64}0 + \frac{9}{64}20 + \frac{1}{64}60 = 3,75$$

Potremmo realizzare un *payoff* effettivo del derivato pari al valore atteso sotto  $P$ , in virtù della legge dei grandi numeri, soltanto come media di un numero molto elevato di tentativi di acquisto scoperto del derivato ipotizzando stazionarietà della distribuzione sottostante. L'aspettativa di forte rialzo espressa da  $P$  si riflette, con l'approccio del vero valore atteso, in un prezzo più basso del *put*. Se fosse prevalsa un'attesa ribassista avremmo ottenuto un prezzo più alto. Il valore atteso *risk neutral* è invece indifferente a qualsiasi vera misura di probabilità ed è sicuramente fatto rispettare in un mercato in equilibrio.

Ci pare quindi di aver raccolto evidenze convergenti che attestano la robustezza della tecnica di valutazione basata su alberi binomiali e l'equivalenza dei due modi nei quali può essere presentata e applicata (costo di replica e valore atteso *risk neutral*). Siamo quindi pronti per generalizzare in linguaggio più rigoroso le conclusioni raggiunte.

Col processo ipotizzato abbiamo ottenuto probabilità  $q$  costanti in tutti i nodi. La tecnica però non cambia, né viene meno la sua validità, se assumiamo processi (purché non degenerati) con salti di entità variabile, forti asimmetrie o altre peculiarità. Anche in tali condizioni siamo in grado di configurare una mappa completa di strategie di arbitraggio locali. In ogni nodo  $(k,j)$  valgono le seguenti formule (con prezzi liquidati a scadenza):

$$q_{k,j} = \frac{F(n)_{k,j} - F(n)_{k+1,j}}{F(n)_{k+1,j+1} - F(n)_{k+1,j}} \quad \Delta_{k,j} = \frac{V_{k+1,j+1} - V_{k+1,j}}{F_{k+1,j+1} - F_{k+1,j}}$$

$$V_{k,j} = q_{k,j}V_{k+1,j+1} + (1 - q_{k,j})V_{k+1,j} \quad V_0 = \mathbb{E}_Q(V_n) = \mathbb{E}_Q(X)$$

dove  $F(n)_{k,j}$  è il prezzo del *forward* sul sottostante con scadenza al nodo  $n$ , osservato allo *step*  $k$  con  $j$  rialzi dal tempo iniziale.

### Perché basarsi su alberi *forward*: riepilogo

L'esempio presentato e quelli che seguiranno mappano i derivati sul processo dei prezzi *forward* e assumono premi e prezzi regolati a scadenza. In questo modo ci differenziamo dalla maggior parte della manualistica sull'*option pricing* in cui si preferisce trattare processi *spot* con premi regolati a pronti. È quindi doveroso motivare questa scelta non ortodossa. Ci sono tre ragioni pratiche, oltre a quella economica prima ricordata<sup>5</sup>:

- operando su *forward* riduciamo a una le operazioni di revisione della strategia ad ogni nodo (in un colpo solo facciamo l'equivalente di una compravendita *spot* più un debito/credito); nella pratica facciamo una sola operazione se esiste un mercato a termine attivo, ne facciamo due se invece dobbiamo riprodurre il *forward* sinteticamente;
- con l'ulteriore accorgimento di rinviare a scadenza il regolamento del prezzo iniziale del derivato, allineiamo tutti i flussi della strategia e del derivato alla data finale, eliminando (o meglio portando in secondo piano) operazioni di credito/debito basate su tassi di interesse, senza quindi dover gestire sull'albero eventuali differenze tra tassi per scadenze diverse e soprattutto le variazioni dei tassi nel tempo; inoltre, eliminando i fattori legati ai tassi e al tempo, si ha la possibilità di costruire alberi a *step* variabili nei quali uno *shock* di prezzo della stessa entità può verificarsi su intervalli con lunghezza differenziata<sup>6</sup>;
- nei modelli della famiglia Black e Scholes, correntemente utilizzati, le volatilità su prezzi *forward* coincidono con quelle *spot*. In aggiunta, con l'evolversi dei mercati, sono i comparti a termine (specie i mercati *future*) che tendono a svolgere le funzioni di *price discovery* su una famiglia di sottostanti sempre più numerosa e rappresentativa. È quindi nel processo dei prezzi *forward* che si svela, in prima istanza, la volatilità. L'ordine può essere allora invertito: prima si determina un (più semplice) processo *forward* e successivamente si retrodetermina il processo *spot* tenendo conto dei fattori secondari che lo legano al primo (come i tassi *repo*, la loro differenziazione per scadenze e la relativa variabilità).

*Ragionare sui forward ha per contro vari inconvenienti: si moltiplica il numero di processi per un dato sottostante e i processi (nel caso dei forward OTC che quotano durate, e non date fisse di scadenza) non vengono più a coincidere con prezzi continuamente trattati e direttamente osservabili. Inoltre col nostro approccio vengono "nascosti" i tassi di interesse che in realtà devono essere già scontati nell'appropriata determinazione del processo forward e dei premi, o degli altri flussi, regolati a scadenza anziché a pronti. L'analista distratto potrebbe trarre da ciò l'erronea conclusione che i tassi di interesse e di riporto netto siano sempre irrilevanti (conclusione vera soltanto in un mondo di tassi nulli e attività sottostanti infruttifere).*

<sup>5</sup> Le coperture sono di fatto operazioni *forward* sintetiche, ma nessuno ci garantisce che siano riproducibili dati uno *spot* e un tasso senza rischio, in quanto potrebbero essere ostacolati dalla illiquidità del mercato del sottostante.

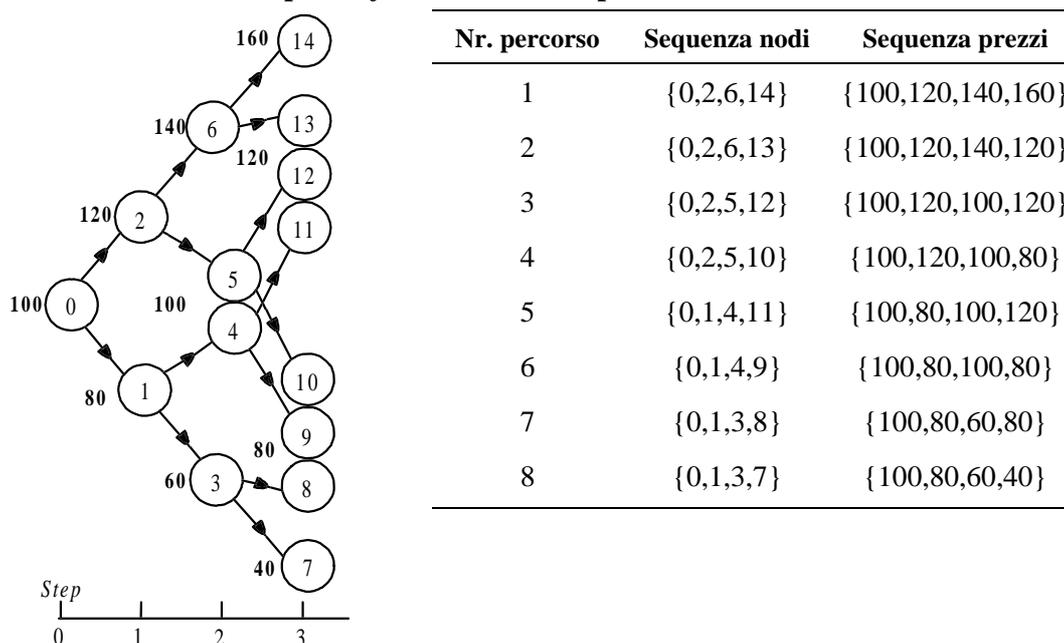
<sup>6</sup> In questo modo disaccoppiamo l'orologio del mercato dal fluire del tempo, adottando unità di scansione basate su variazioni di prezzo.

### 3.3 Secondo livello: apprendista

#### 3.3.1 L'arbitrage pricing: definizioni basilari

Per razionalizzare ed estendere le conclusioni raggiunte si definiscono formalmente alcuni concetti basilari per il *pricing* dei derivati, che ci servono per interpretare correttamente le distribuzioni *risk neutral* e le volatilità da esse ricavabili. Per accompagnare le definizioni con semplici esempi, riprendiamo l'albero utilizzato nel caso prima esaminato. Ne diamo però una rappresentazione ridondante, che espone distintamente i nodi "sovrapposti" raggiunti con percorsi che si ricombinano. Numeriamo i nodi come nel paragrafo 3.2.

Figura 3.3.1 - Processo del prezzo *forward* e relativi percorsi.



Ed ora via con le definizioni<sup>7</sup>.

1. Ribadiamo la definizione di **processo** ( $F$ ) come insieme degli *stati* e dei possibili prezzi ad essi associati, mappati su distinti nodi dell'albero, e della trama di *interconnessioni* (a senso unico). La variabile aleatoria  $F_k$  denota il vettore dei valori assumibili al tempo  $k$  (ad esempio  $F_2$  assume valore {60,100,100,140} nei nodi {3,4,5,6}).
2. Ripetiamo anche la definizione di **misura** ( $P$  o  $Q$ ), entità distinta dal processo data dall'insieme delle probabilità associate ai movimenti tra stati interconnessi. In un processo binomiale la misura è definita dalle probabilità di movimento al rialzo ( $p_j$  o  $q_j$ ) associate al nodo  $j$ -esimo da cui parte il movimento. La misura può essere costante in tutti i nodi o variabile da nodo a nodo.

*Processo e misura vanno tenuti distinti, ancorché siano aspetti intimamente legati di una distribuzione. La distinzione è essenziale per rimarcare che il pricing dei derivati è indifferente rispetto a qualsiasi vera misura  $P$  si ipotizzi, in quanto implicitamente assume una misura  $Q$  dipendente dal solo processo.*

3. Una **filtrazione** ( $\mathcal{F}_k$ ) è l'insieme (vettore) delle possibili storie del prezzo (anch'esse vettori di stati/prezzi) dal tempo  $t_0$  fino al tempo  $t_k$  (compreso). Come  $F_k$ ,  $\mathcal{F}_k$  è un processo che dato  $k$

<sup>7</sup> Nell'esposizione si segue il percorso di uno dei più diffusi manuali di calcolo stocastico per i derivati, ovvero Baxter e Rennie (1996:29-34).

assume tanti valori (storie) quanti sono gli stati in  $t_k$ . C'è anzi una corrispondenza biunivoca tra gli elementi di  $\mathbf{F}_k$  e di  $\mathcal{F}_k$ : ad ogni prezzo/nodo raggiungibile corrisponde un unico percorso e viceversa. La tabella seguente elenca le filtrazioni per *step* con dettaglio dei percorsi che le compongono.

**Tabella 3.3.1 - Il processo della filtrazione  $\mathcal{F}_k$ .**

Step ( $k$ )		Nodi terminali	Percorsi componenti
0	$\mathcal{F}_0$	0	{0}
1	$\mathcal{F}_1$	2	{0,2}
		1	{0,1}
2	$\mathcal{F}_2$	6	{0,2,6}
		5	{0,2,5}
		4	{0,1,4}
		3	{0,1,3}
3	$\mathcal{F}_3$	14	{0,2,6,14}
		13	{0,2,6,13}
		12	{0,2,5,12}
		11	{0,1,4,11}
		10	{0,2,5,10}
		9	{0,1,4,9}
		8	{0,1,3,8}
7	{0,1,3,7}		

4. Un **derivato** (*claim*  $\mathbf{X}$ ) su un albero è una funzione di  $\mathbf{F}_n$ , cioè dei valori del processo nei nodi relativi all'orizzonte di maturazione  $t_n$ . È equivalente dire che  $\mathbf{X}$  è una funzione della filtrazione  $\mathcal{F}_n$ , che è collegata con  $\mathbf{F}_n$ . La differenza cruciale tra un derivato e un processo è che il primo è definito solo nei nodi in  $t_n$ , mentre il processo "riempie" anche i nodi ai passi precedenti. Il derivato può dipendere dai soli valori temporali in  $t_n$  o anche dalla loro storia.

Ad esempio, nella tabella seguente definiamo due derivati con scadenze in  $t_2$ : una *call* con *strike* 95 e un contratto che paga le differenze tra il minimo dei prezzi segnati tra  $t_0$  e  $t_2$  e 50.

**Tabella 3.3.2 - Esempi di derivati con scadenza in  $t_2$ .**

Nr. Nodo	$F_2$	Max ( $F_2 - K, 0$ )	Min( $F_0, F_1, F_2$ )-50
6	140	45	Min(100,120,140)-50=50
5	100	5	Min(100,120,100)-50=50
4	100	5	Min(100,80,100)-50=30
3	60	0	Min(100,80,60)-50=10

5. L'operatore di **aspettativa condizionata**  $\mathbb{E}_Q(\cdot|\mathcal{F}_k)$  denota il valore atteso di una distribuzione dati una misura  $Q$  e una storia  $\mathcal{F}_k$  da  $t_0$  a  $t_k$ . Generalizza l'operatore analogo utilizzato finora il più delle volte per ricavare aspettative all'istante iniziale. Può infatti rappresentare anche un valore atteso calcolato in momenti successivi a  $t_0$ . Dato un processo o un *claim*  $\mathbf{Z}$  definiti in  $t_n$ ,  $\mathbb{E}_Q(\mathbf{Z}_n|\mathcal{F}_k)$  è a sua volta un processo che assume, dato  $k$ , tanti valori quanti sono i nodi in  $t_k$ , ovvero un valore per ogni percorso compreso in  $\mathcal{F}_k$ . Per ogni nodo in  $t_k$ ,  $\mathbb{E}_Q(\mathbf{Z}_n|\mathcal{F}_k)$  è calcolato sulla porzione della distribuzione finale della variabile che è visibile (o meglio raggiungibile) partendo da quel nodo.  $\mathbb{E}_Q(\mathbf{Z}_n|\mathcal{F}_k)$  ha un unico valore che coincide con il valore atteso non condizionato della variabile (in precedenza indicata come  $E(\mathbf{Z})_0$ ). Se l'istante da cui si deriva

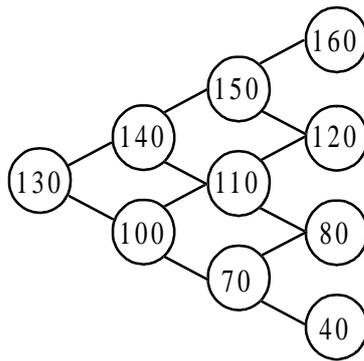
l'aspettativa coincide con  $t_n$ , allora  $E_Q(\mathbf{Z}_n|\mathcal{F}_n)$  ha valori coincidenti con i valori di  $\mathbf{Z}_n$ , senza nessun calcolo probabilistico su valori susseguenti. La tabella seguente esemplifica il calcolo dell'aspettativa condizionata di  $\mathbf{F}$  sulla semplice misura  $P$  per  $p=0,75, 1-p=0,25$ .

**Tabella 3.3.3 - Aspettativa condizionata di  $\mathbf{F}$  dato  $\mathcal{F}_k$ .**

Aspettativa	Nodi	Valori della filtrazione	Valore atteso di $\mathbf{F}$
$E_P(\mathbf{F}_3 \mathcal{F}_0)$	0	{0}	$\frac{27}{64}160 + \frac{27}{64}120 + \frac{9}{64}80 + \frac{1}{64}40 = 130$
$E_P(\mathbf{F}_3 \mathcal{F}_1)$	2	{0,2}	$\frac{9}{16}160 + \frac{6}{16}120 + \frac{1}{16}80 = 140$
	1	{0,1}	$\frac{9}{16}120 + \frac{6}{16}80 + \frac{1}{16}40 = 100$
$E_P(\mathbf{F}_3 \mathcal{F}_2)$	6	{0,2,6}	$\frac{3}{4}160 + \frac{1}{4}120 = 150$
	5	{0,2,5}	$\frac{3}{4}120 + \frac{1}{4}80 = 110$
	4	{0,1,4}	$\frac{3}{4}120 + \frac{1}{4}80 = 110$
	3	{0,1,3}	$\frac{3}{4}80 + \frac{1}{4}40 = 70$
$E_P(\mathbf{F}_3 \mathcal{F}_3)$	14	{0,2,6,14}	160
	13	{0,2,6,13}	120
	12	{0,2,5,12}	120
	11	{0,1,4,11}	120
	10	{0,2,5,10}	80
	9	{0,1,4,9}	80
	8	{0,1,3,8}	80
7	{0,1,3,7}	40	

Dato un derivato  $\mathbf{X}$  possiamo trattare  $E_P(\mathbf{X}|\mathcal{F}_k)$  come un processo, definito non solo in  $t_n$  (come valore finale) ma anche prima (come aspettativa sotto  $P$  del valore finale). Con questo semplice espediente possiamo ad esempio ricostruire il processo del valore atteso di un banale derivato, che paga in  $t_3$  un *payoff*  $\mathbf{X}=\mathbf{F}_3$ , come nella figura seguente (dove per semplicità non si evidenziano i tratti di percorso sovrapposti).

**Figura 3.3.2 - Processo dell'aspettativa condizionata  $E_p(X|\mathcal{F}_k)$  con  $p$  costante ( $p = 0,75$ ).**



6. Un **processo prevedibile**, dato un albero su cui sono definiti uno o più processi aleatori, è un processo sullo stesso albero il cui valore al tempo  $t_k$  dipende soltanto da  $\mathcal{F}_{k-1}$ , ovvero dalla storia degli altri processi fino allo *step* precedente. Ad esempio, è prevedibile in  $t_k$  il montante di un credito a tasso fisso uniperiodale stipulato in date precedenti o anche (banalmente) il valore ritardato del prezzo di un titolo. L'esempio più utile di processo prevedibile è però  $\Delta_k$ , inteso come posizione di copertura in essere al tempo  $k$  prima della revisione (ovvero il  $\Delta$  ristrutturato un periodo prima):  $\Delta_k$  è funzione di due coppie di valori di  $\mathbf{F}_k$  e di  $\mathbf{X}_k$  esattamente identificabili in  $t_{k-1}$  dato il nodo raggiunto. I processi prevedibili assumono valori da  $t_1$  in avanti perché non è sensato definire il valore di un processo prevedibile in  $t_0$  mancando una storia precedente.
7. Un processo  $\mathbf{F}$  è una **martingala** rispetto a una misura  $\mathbb{Q}$  e a una filtrazione  $\mathcal{F}_k$  se in tutti i nodi al tempo  $k$  l'aspettativa di  $\mathbf{F}_n$  sotto  $\mathbb{Q}$ , dove  $n$  è uno *step* successivo a  $k$ , è uguale al valore di  $\mathbf{F}_k$  nel nodo, e ciò è verificato per tutti i  $k \leq n$ .  $\mathbb{Q}$  è chiamato **misura di martingala** per il processo. In formule:

$$E_{\mathbb{Q}}(\mathbf{F}_n|\mathcal{F}_k) = F_k \quad \text{per tutti i } k \leq n$$

*La proprietà della martingala non è associata al processo per qualsiasi misura, ma data una appropriata misura  $\mathbb{Q}$ . Ad esempio il processo di  $\mathbf{F}_k$  nell'esempio precedente (v. tabella) data  $p=0,75$  non è una martingala, essendo  $E_p(\mathbf{F}_3|\mathcal{F}_0)=130$  diverso da  $F_0=100$ . È invece una martingala lo stesso processo sotto la misura  $\mathbb{Q}$  con  $q=0,5$ . Per quello che sappiamo di  $\mathbb{Q}$  possiamo anche affermare che basta conoscere il processo per "dettare" la misura di probabilità sotto la quale lo stesso diventa una martingala. Un processo di tipo martingala rivela in ogni nodo il proprio valore atteso a qualsiasi data futura. In altre parole il processo sotto la misura  $\mathbb{Q}$  ha drift nullo, ovvero il suo ritorno sul prezzo atteso  $\mu$  è nullo in tutti i nodi per qualsiasi orizzonte temporale. La martingala fondamentale è il processo dei prezzi forward sotto la misura risk neutral  $\mathbb{Q}$ <sup>8</sup>.*

<sup>8</sup> Una martingala facilmente ricavabile da  $\mathbf{F}_k$  sotto  $\mathbb{Q}$  è il processo del valore attuale dello *spot* riportato ad un tempo iniziale  $t_0=0$ . Si dimostra facilmente che (ponendo scadenza del *forward* =  $t_n$ ):

$$S_k e^{-rt_k} = \mathbf{F}(n)_k e^{-rt_n}$$

Per cui il processo dello *spot* attualizzato assume in ogni nodo valori che sono una semplice proporzione costante dei corrispondenti valori di  $\mathbf{F}_k$ . Questa martingala alternativa viene impiegata quando si preferisce tenere come processo fondamentale quello dei prezzi *spot*.

### 3.3.2 Il processo dell'aspettativa condizionata di un claim

Sulla definizione di martingala possiamo fondare un risultato più generale. Si vuole dimostrare che il processo definito dal valore atteso di un processo o di un *claim* sotto una misura di probabilità qualsiasi  $\mathbb{P}$  è sempre una  $\mathbb{P}$ -martingala. Definendo:

$$N_k = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\mathbf{X} | \mathcal{F}_k)$$

il processo  $N_k$  è sempre una  $\mathbb{P}$ -martingala. Ciò si dimostra in virtù della **legge della torre** per la quale l'operatore valore atteso è nidificabile, ovvero può essere applicato in modo ricorsivo; determinare in  $t_j$  il valore atteso di una distribuzione in  $t_n$  e poi calcolare in  $t_i$  il valore atteso del valore atteso in  $t_j$  portandosi indietro di altri  $(j-i)$  periodi equivale a calcolare direttamente in  $t_i$  il valore atteso sulla distribuzione finale in  $t_n$ :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z_n | \mathcal{F}_i) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z_n | \mathcal{F}_j) | \mathcal{F}_i) \quad i \leq j$$

Per la legge della torre è facile verificare se un processo è una  $\mathbb{P}$ -martingala: basta confrontare tale processo con il processo dell'aspettativa condizionata del suo valore finale  $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z_n | \mathcal{F}_k)$ . Solo se i due processi sono identici allora  $\mathbf{Z}$  è una  $\mathbb{P}$ -martingala.

Tornando al caso che ci interessa, ovvero il processo  $\mathbf{Z}$  del valore atteso di un derivato  $\mathbf{X}$  sotto  $\mathbb{Q}$ , possiamo trovare conferma in questo risultato generale di quanto è facilmente osservabile dagli esempi precedenti: il valore uno *step* prima della scadenza è, per costruzione, una  $\mathbb{Q}$ -martingala. Il valore atteso due *step* prima, che è il valore atteso del valore atteso in  $t_{n-1}$ , è per la legge della torre anche il valore atteso del valore finale in  $t_n$ . Quindi è una martingala non solo in  $t_{n-1}$ , ma anche in  $t_{n-2}$ . Con passaggi analoghi possiamo concludere che l'intero processo  $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\mathbf{X} | \mathcal{F}_k)$  è una martingala.

### 3.3.3 Teorema della rappresentazione binomiale

Nella strategia di replica calcoliamo dapprima la misura  $\mathbb{Q}$  sul processo  $\mathbf{F}$ , l'applichiamo al derivato  $\mathbf{X}$  e ne ricaviamo il processo  $\mathbf{V}$  del relativo valore atteso sotto  $\mathbb{Q}$ . Abbiamo quindi due martingale: i processi sotto  $\mathbb{Q}$  di  $\mathbf{F}$  e di  $\mathbf{V}$ . In questo contesto possiamo enunciare e dimostrare che quando è possibile costruire una martingala sul sottostante, allora è possibile ricavare anche una  $\mathbb{Q}$ -martingala per il valore del derivato ed esiste una strategia di replica praticabile. Traducendo in linguaggio rigoroso enunciamo il:

- **teorema della rappresentazione binomiale:** dato un processo binomiale dei prezzi  $\mathbf{F}$  e una misura  $\mathbb{Q}$  sotto la quale  $\mathbf{F}$  è una martingala, se  $\mathbf{V}$  è qualsiasi altra  $\mathbb{Q}$ -martingala, allora esiste un processo prevedibile **Delta** tale per cui:

$$\mathbf{V}_k = \mathbf{V}_0 + \sum_{i=1}^k \mathbf{Delta}_i \Delta \mathbf{F}_i$$

dove  $\Delta \mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i - \mathbf{F}_{i-1}$  è il vettore delle variazioni di  $\mathbf{F}$  dal tempo  $t_{i-1}$  al tempo  $t_i$  e  $\mathbf{Delta}_i$  è il vettore dei valori di *Delta* al tempo  $t_i$ , determinabili con certezza in  $t_{i-1}$ .

Il teorema enunciato non fa altro che ribadire ed estendere quanto osservato circa la corrispondenza tra misura *risk neutral* e strategia di riproduzione autofinanziante. Qui vediamo il principio affermato come valido per la replica di qualsiasi derivato a condizione che si possa, con la misura  $\mathbb{Q}$  ricavata per il sottostante, ricavare dal suo *payoff* finale un processo di tipo  $\mathbb{Q}$ -martingala, operazione che è sempre possibile quando le probabilità  $\mathbf{q}_k$  sono comprese tra 0 e 1. Come già evidenziato, ciò richiede

che in ogni ramo il prezzo di partenza  $F_0$  sia compreso tra i prezzi  $F_u$  e  $F_d$  da esso discendenti. Se tale vincolo viene rispettato, allora (possiamo aggiungere come corollario) la misura  $Q$  esiste ed è unica.

*Il teorema enunciato non fa altro che riproporre in forma matriciale l'uguaglianza verificata in equilibrio tra valori successivi del derivato nel caso uniperiodale con premio liquidato a scadenza, così formulata:*

$$V_0 = V_u - \text{Delta}(F_u - F_0) = V_d - \text{Delta}(F_d - F_0)$$

equivalente, ponendo  $\Delta V_u = V_u - V_0$ ,  $\Delta V_d = V_d - V_0$ ,  $\Delta F_u = F_u - F_0$ ,  $\Delta F_d = F_d - F_0$ , a:

$$V_u = V_0 + \text{Delta} \Delta F_u \quad V_d = V_0 + \text{Delta} \Delta F_d$$

Per dimostrare il teorema, partiamo dalla constatazione che  $\Delta V$  e  $\Delta F$  misurano due segmenti di retta, quindi la loro relazione è di tipo lineare.  $\Delta V$  può essere "adattato" a  $\Delta F$  applicando due modifiche: una additiva per *shift* per aggiustare l'asimmetria tra variazioni e una moltiplicativa per scala. *Shift* e scala corrispondono alle variabili  $x$  e  $y$  nel seguente sistema, le cui soluzioni formalizzano le definizioni date:

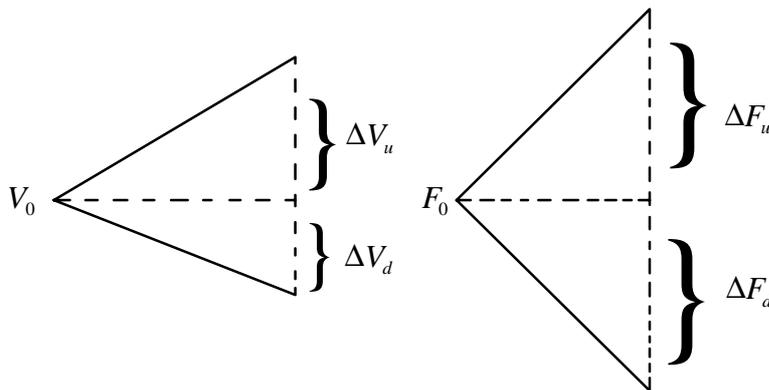
$$\begin{cases} \Delta V_u = x + y\Delta F_u \\ \Delta V_d = x + y\Delta F_d \end{cases}$$

risolto per:

$$y = \frac{\Delta V_u - \Delta V_d}{\Delta F_u - \Delta F_d} = \frac{V_u - V_d}{F_u - F_d}$$

$$x = \Delta V_u - y\Delta F_u = V_u \frac{F_0 - F_d}{F_u - F_d} + V_d \frac{F_u - F_0}{F_u - F_d} - V_0$$

**Figura 3.3.3 – Variazioni di valore del derivato e del sottostante.**



La soluzione per  $x$  indica che tale *shift* è pari alla differenza tra il valore atteso sotto  $Q$  del derivato e il suo valore iniziale, che è pari a 0 essendo  $V$  una  $Q$ -martingala. Pertanto  $\Delta V$  può essere pareggiato esclusivamente da  $\Delta F$  moltiplicato per un rapporto di proporzionalità *Delta*, senza la complicazione di altre componenti fisse, come  $x$ , che invece sarebbe necessario introdurre se si partisse da un valore iniziale diverso dal valore atteso *risk neutral*. Un'altra strada per dimostrare che  $x$  deve essere nullo passa per l'analisi del valore atteso di  $\Delta V$ , definito secondo la relazione lineare generica:

$$E(\Delta V) = x + E(\Delta F)y$$

Dato che  $F$  è una martingala, il suo *drift* è nullo, quindi  $E(\Delta F) = 0$ . Su un orizzonte uniperiodale  $y$  è costante quindi  $E(\Delta F)y = 0$ . Ma anche  $E(\Delta V)$  deve essere nullo, essendo il *drift* di una martingala. Quindi, affinché valga l'uguaglianza,  $x$  deve essere uguale a zero.

Uno *shift* diverso da 0 creerebbe problemi non in quanto imprevedibile ( $x$  è prevedibile come *Delta*, dipendendo dai valori nei nodi discendenti), ma perché la sua presenza denoterebbe la necessità di immettere liquidità nella replica (se  $\Delta V > \text{Delta} \Delta F$ ) o di prelevarla (con  $\Delta V < \text{Delta} \Delta F$ ) perché non basterebbe in tal caso la variazione di valore del *forward* a copertura per pareggiare  $\Delta V$ . Invece se  $V_0$  è un valore atteso *risk neutral*, la componente *shift* è nulla e la replica si conferma autofinanziante: la posizione Derivato-Replica o Replica-Derivato, a prezzi di equilibrio, ha sempre valore netto nullo: 1) sia alla costituzione; 2) sia dopo ogni movimento di prezzo (il valore delle due parti varia in modo compensato); 3) sia dopo ogni conseguente revisione della strategia (variare il *Delta* non comporta flussi di liquidità né effetti economici poiché implica operazioni su *forward* e prezzi di equilibrio il cui *mark-to-market value* è nullo); 4) sia, infine, alla scadenza.

### 3.3.4 Conclusioni sull'arbitrage pricing in condizioni di mercato ideali

Ricapitoliamo le premesse e i risultati dell'analisi a tempo discreto in un mercato ideale. Abbiamo ipotizzato un mercato mosso da *shock* binomiali indipendenti nel tempo la cui ampiezza (volatilità) è esattamente prevedibile in ogni tempo/stato (in ogni ramo), ancorché non necessariamente costante. Dato un sottostante, si è supposta l'esistenza di un mercato *forward* efficiente sul quale è sempre possibile trattare quantità a piacere per qualsiasi scadenza, senza costi di transazione ed a prezzi coerenti, data la scadenza, con la relazione di equilibrio tra prezzi *spot* e *forward* (per semplicità abbiamo introdotto, senza perdere in generalità, l'ipotesi di uniformità per scadenze e l'invarianza nel tempo dei tassi *spot* su quel sottostante). Il processo del *forward* deve rispettare la ragionevole condizione di non arbitraggio  $F_d < F_0 < F_u$ .

In tale contesto è possibile costruire una strategia di riproduzione per qualsiasi contratto derivato con *payoff* che sia funzione di  $\mathbf{F}$  a una data futura di maturazione  $t_n$ . La strategia consiste nell'assumere una posizione *Delta* in contratti *forward* con scadenza  $t_n$  e nel variare tale posizione ad ogni movimento del prezzo sottostante. Il *Delta* di equilibrio è noto con un periodo di anticipo rispetto allo *shock* a copertura del quale è detenuto. Questa strategia determina, per qualsiasi percorso di  $\mathbf{F}$  tra la data iniziale e la scadenza, un risultato netto a scadenza che si discosta da quello del derivato per una differenza costante, quale che sia il valore futuro del prezzo.

La differenza, costante per costruzione, tra *payoff* finale del *claim* e risultato della strategia misura il valore iniziale di equilibrio del derivato, ovvero il prezzo di equilibrio in ipotesi di regolamento dello stesso a scadenza (il prezzo con regolamento a pronti si ottiene con una banale attualizzazione al tasso inizialmente vigente per scadenza  $t_n$ ). Tale prezzo di equilibrio può essere fatto rispettare con arbitraggi privi di rischio dati da posizioni lunghe sul derivato e corte sulla strategia (quando il prezzo di mercato del *claim* è inferiore al valore di equilibrio) o corte sul derivato e lunghe sulla strategia (nel caso opposto). Il valore di equilibrio del derivato (per regolamento a scadenza), al tempo  $t_0$  o in qualsiasi tempo/stato successivo, si può facilmente calcolare come valore atteso a scadenza del *payoff* sotto la misura di probabilità  $\mathbb{Q}$ , che rende il processo del prezzo sottostante una martingala, in formule:  $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\mathbf{F}_n | \mathcal{F}_k) = \mathbf{F}_k$  per  $k \leq n$ .

Il teorema della rappresentazione binomiale afferma che dati due processi di tipo martingala sotto una stessa misura  $\mathbb{Q}$ , definita da probabilità *risk neutral* corrette, è sempre possibile ricavare un processo prevedibile *Delta* che consente di pareggiare le variazioni del primo processo con il prodotto tra il *Delta* e le variazioni del secondo in modo che:

$$V_n = V_0 + \sum_{i=1}^n \text{Delta}_i \Delta \mathbf{F}_i$$

Da ciò si può facilmente dimostrare l'eguaglianza tra il valore atteso sulla  $\mathbb{Q}$ -martingala,  $V_0$ , e la differenza tra i risultati netti a scadenza del derivato ( $V_n$ ) e della strategia ( $\sum_{i=1}^n \mathbf{Delta}_i \Delta F_i$ ):

$$V_n - \sum_{i=1}^n \mathbf{Delta}_i \Delta F_i = V_0 \quad \text{per tutti i percorsi in } \mathcal{F}_n$$

L'equazione precedente afferma il perfetto bilanciamento tra i flussi di liquidità *a scadenza* di un arbitraggio derivato+strategia. Non essendoci flussi prima della scadenza (trattando *forward at market* e derivati con prezzo regolato a maturazione) la posizione coperta è autofinanziante, quindi la sua valutazione non è complicata da flussi di cassa intermedi.

Con questa solenne enunciazione concludiamo la nostra rassegna introduttiva sul modello binomiale applicato in condizioni di mercato ideali.

# Conclusioni

Nei capitoli precedenti abbiamo ragionato su due problematiche interconnesse, ovvero la misura della volatilità dei ritorni e il *pricing* delle opzioni. Abbiamo rappresentato il mercato di un *asset* in un ambiente di laboratorio molto semplice simulando al suo interno il comportamento del valore di un titolo sottostante e dei relativi contratti derivati. Nei nostri esperimenti i prezzi di mercato prevalenti in ogni stato futuro sono stati considerati esogeni, ed effettivamente negoziabili per qualsiasi quantitativo in acquisto o in vendita. Si è ipotizzata anche l'esistenza di un mercato a termine completo ed efficiente.

Le conclusioni raggiunte sono rilevanti ed è utile a questo punto riepilorarle. E' innanzitutto emerso che le opzioni sono replicabili senza rischio quando si conosce anche solo in parte la vera distribuzione del sottostante, limitatamente alle informazioni che definiscono il processo del prezzo. Nel caso discreto, il processo è definito dall'albero dei possibili prezzi futuri oppure, come abbiamo scelto parsimoniosamente di fare, dalla forma della distribuzione e da un parametro di perturbazione, che è determinante nell'influenzare la dispersione della distribuzione di probabilità risultante.

Il prezzo del derivato, dipendendo dal solo processo, è strettamente collegato alla suddetta dispersione, o volatilità. Inoltre, pur non dipendendo da stime delle vere probabilità, può essere spiegato come media dei possibili *payoff* futuri ponderati per le pseudoprobabilità neutrali al rischio che si ricavano dallo stesso processo. Per un processo binomiale a passo singolo le misure di volatilità dipendono dalle probabilità ipotizzate. Tuttavia, fortunatamente, aumentando i passi e riducendone la durata la misura di volatilità converge verso un valore unico indipendente dalle probabilità binomiali, ed inoltre le differenze tra distribuzioni vere e neutrali al rischio (tendenti entrambe alla forma normale) si riflettono esclusivamente nel valore atteso. Il prezzo di mercato delle opzioni, quindi, incorpora una volatilità implicita che misura il compenso equo a fronte del costo della strategia di replica. Al tempo stesso la volatilità implicita, valendo le ipotesi dei modelli canonici, esprime anche la stima della volatilità attesa della vera distribuzione.

In un orizzonte multiperiodale, se assumiamo perfetta conoscenza del (solo) processo del prezzo, e rappresentiamo questo processo come albero binomiale, possiamo replicare senza rischio un'opzione e determinarne un valore di equilibrio che il mercato farà sicuramente rispettare se le ipotesi sul processo sono condivise, purché non venga mai meno l'incertezza sulla direzione dei movimenti di prezzo. Quest'ultimo vincolo di non arbitraggio implica che in nessun nodo dell'albero si abbiano probabilità *risk neutral* degenerate (non positive).

La strumentazione per il *pricing* di non arbitraggio e per la misura della volatilità mediante alberi binomiali si è dimostrata robusta ed economica. Ciò induce a ben sperare sulla possibilità di estenderla ed applicarla a rappresentazioni matematiche a tempo continuo, analiticamente meglio trattabili, e a ipotesi più realistiche sul comportamento statistico dei prezzi e sul funzionamento dei mercati. In alcuni casi questo ottimismo è giustificato, in altri no.

I modelli di *pricing* di non arbitraggio reggono bene passando dal tempo discreto al tempo continuo, tenendo ferme le altre ipotesi. Nel continuo la rappresentazione matematica è meno familiare, premesse e dimostrazioni risultano meno intuitive, ma in cambio otteniamo formule di *pricing* più compatte, del tipo di quella di Black e Scholes (1973), per molte delle tipologie di opzioni più diffuse.

Altrettanto bene il modello si adatta, nel discreto e nel continuo, a distribuzioni di forma irregolare e/o con volatilità variabile nel tempo, purché si ipotizzi la prevedibilità di questi fenomeni. Si è infatti prima affermato che le strategie di replica sull'albero binomiale funzionano non soltanto nel caso di processi generati da semplici parametri costanti (che danno origine a distribuzioni bilanciate e stazionarie), ma anche nel caso di alberi irregolari, contraddistinti da rami di ampiezza e asimmetria variabile.

La logica di *arbitrage pricing* entra in crisi quando si introducono ipotesi di volatilità stocastica (che impedisce di determinare correttamente i rapporti di copertura) e di costi di transazione e impatto sui prezzi (che fanno saltare gli equilibri economici delle strategie dinamiche). Sono queste le problematiche più dibattute nella letteratura recente in materia di analisi del rischio e di opzioni, ben rappresentata da Bouchaud e Potters (1997). Molti progressi si sono compiuti nella ricognizione empirica e nella misurazione di questi fenomeni. Pur tuttavia, la strada dell'affinamento tecnico dei modelli non ha ancora portato a risultati largamente condivisi e diffusamente applicati.

Dal canto loro, gli operatori in opzioni, come ampiamente testimoniato in Taleb (1997), hanno imparato a muoversi tra le anomalie del mercato applicando con duttilità i modelli classici, in particolare differenziando la volatilità implicita in funzione della durata e del prezzo di esercizio. E' del tutto plausibile che in futuro la prassi operativa giunga a recepire alcuni dei modelli di nuova generazione che studiosi di econometria, fisica statistica e matematica applicata elaborano incessantemente in molti paesi del mondo. La comprensione dei fondamentali dell'*arbitrage pricing*, compendiati in questo lavoro, dovrebbe comunque rimanere il primo passo di un ideale percorso formativo in materia di analisi della volatilità.

# Bibliografia

- Arrow, K. (1964), "The Role of Securities in the Optimal Allocation of Risk Bearing", in *Review of Economic Studies*, vol. 31, pagg. 91-96.
- Baxter, M. e A. Rennie (1996), *Financial Calculus. An Introduction to Derivative Pricing*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Black, F. e M. Scholes (1973), "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", in *Journal of Political Economy*, vol. 81, May-June, pagg. 637-654.
- Bouchaud, J.P. e M. Potters (1997), *Théorie des Risques Financiers*, Aléa-Saclay-Eyrolles, Paris.
- Cox, J.C. e S.A. Ross (1976), "The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes", in *Journal of Financial Economics*, vol. 3, pagg. 145-166.
- Cox, J.C., S.A. Ross e M. Rubinstein (1979), "Option Pricing: A Simplified Approach", in *Journal of Financial Economics*, vol. 7, July, pagg. 229-263.
- Cox, J.C. e M. Rubinstein (1985), *Options Markets*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs.
- Debreu, G. (1959), *Theory of Value*, John Wiley & Sons, New York.
- Derman, E. e I. Kani (1994), "Riding on a Smile", in *Risk*, vol. 7, nr. 2, February, pagg. 32-39.
- Dupire, B. (1993), "Model Art", in *Risk*, vol. 6, nr. 9, September, pagg. 118-121.
- Erzegovesi, L. (1997), *Ingegneria finanziaria. Principi e applicazioni standard nei mercati del debito e dei tassi*, Università di Trento, Trento.
- Hull, J.C. (1997), *Options, Futures and Other Derivatives*, Prentice-Hall, Upper SaddleRiver NJ, 3a edizione.
- Karatzas, I. e S. Shreve (1998), *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer Verlag, New York, 2a edizione.
- Rubinstein, M. (1994), "Implied Binomial Trees", in *Journal of Finance*, vol. 49, nr. 3, July, pagg. 771-818.
- Taleb, N. (1997), *Dynamic Hedging. Managing Vanilla and Exotic Options*, John Wiley & Sons, New York.



## **Collana ALEA Tech Reports**

- Nr.1 F. Sguera, *Valutazione e copertura delle opzioni binarie e a barriera*, Marzo 1999.
- Nr.2 A. Beber, *Introduzione all'analisi tecnica*, Marzo 1999.
- Nr.3 A. Beber, *Il dibattito su dignità ed efficacia dell'analisi tecnica nell'economia finanziaria*, Marzo 1999.
- Nr. 4 L. Erzegovesi, *Capire la volatilità con il modello binomiale*, Luglio 1999.

I Tech Reports possono essere scaricati gratuitamente dal sito di ALEA:  
<http://www.cs.unitn.it/grupE>. Dalla Home Page seguire il collegamento [ALEA Tech Reports](#).